

# 关于路灯安置优化问题的研究报告

团队成员名单：队员：梁文，谭诗毅，陈柳君

指导老师：何湘常

**问题由来：**在学校放晚修后走在回宿舍的路上，发现路灯照下来的光一些地方很亮，一些地方却很暗，由此联想到现在的路灯安置，一般是靠经验，而没有真正的优化，在 21 世纪的今天，能源日趋紧张，我们必须从实际出发，安置的路灯既要满足需要，又要节约能源。

**摘要：**本文将从一盏路灯的照明情况的分析出发，研究怎样设计合适的高度和间距使所安置的路灯既满足人们的需要，又能最大限度的节约能源。首先根据一盏路灯的照明情况，建立一盏灯照明面积最大的模型。再建立两盏灯照明时，两灯之间的间距最大的模型，并由此得出一排灯的模型。之后，再建立沿路两旁分布的两排路灯的模型，最后根据模型，设计出既满足人们需要，又节约能源的安置路灯的方案。

**Abstract:** Beginning with the analyze of the lighting condition of a street lamp, this paper studies how to design the proper height of street lights and the proper space among street lights so as to meet people's need, and save energy as well. Firstly, we establish a model in which the light of the street lamp can reach its maximize size by studying one road lamp. Secondly, we set up a model in which the space between two lights is maximum. Thirdly, a model of a row of lights are established, and then a model of two rows of lights on both sides of a street. At last, we put forward a programme that can both meet people's need and save energy according to reality.

正文：

## 一、背景知识：

- 1、光强度 (luminous intensity, I): 光源在某一方向立体角内之光通量大小。以 I 表示，单位：坎德拉 (candela, cd)，一般而言，光源会向不同方向以不同之强度放射出其光通量。在特定方向所放出之可见光辐射强度称为光强度。
- 2、光亮度(luminance, L): 光亮度是表示发光面明亮程度的，指发光表面在指定方向的发光强度与垂直且指定方向的发光面的面积之比，单位是坎德拉/平方米。光亮度是指一个表面的明亮程度，以 L 表示。
- 3、光通量(Luminous flux,  $\Phi$ ): 光通量指人眼所能感觉到的辐射能量，光通量通常用  $\Phi$  来表示，光通量的单位为“流明”，符号：lm。
- 4、光照度：即通常所说的勒克司度 (lux)，表示被摄主体表面单位面积上受到的光通量。1 勒克司相当于 1 流明/平方米，即被摄主体每平方米的面积上，受距离一米、发光强度为 1 烛光的光源，垂直照射的光通量。光照度是衡量拍摄环境的一个重要指标。单位：勒克司。

照度定律：光的强弱由两个因素决定：(1)光源的发光强度；(2)被照射对象和光源之间的距

$$E=I/R^2$$

离。人工光条件下照度与光源距离的平方成反比即  $E=I/R^2$ ，E 为照度 R 为对象至光

源的距离， $I$  为光源发光强度。当点光源  $O$  距照明平面中心  $A$  的距离为  $h$  时，平面上  $A$  点

$$E = \left( \frac{I}{b^2} \right) \cos \alpha = \frac{I_3}{b^2}$$

的照度为

## 二、照度分析

对于人的眼睛最敏感的波长为  $5.5 \times 10^{-7} \text{ m}$  的黄绿光，1 流明相当于 1/685 瓦特。

一般常见或需要的照度：晴朗夏天室外背荫处得照度为 1000-10000 流明。由上述内容，为保证在该路段上处处都能有满足正常活动需要的照明强度，取照度的最小值为

$$20 \text{ w/m}^2$$

## 三、模型的假设：

1 主要考虑高度和间距的优化问题为简化模型设路灯的额定功率为定值，额定电压为 220

伏，额定电流为 10 安，所以取额定功率  $p_0 = 2200 \text{ w}$

2 经目测，校内有一条路为完全规范的，即处处等宽。即宽度约为 5 米，长约为 260 米。

3 经查阅物理知识，照明强度直接影响可见度，只有照明强度不低于某定值  $E_0$  时，才能认

为物体可见。在这里认为对所有物体  $E_0$  均为  $20 \text{ w/m}^2$ 。

**参量变量：**路灯的高度  $h$ ，路灯的功率  $p$ ，使物体可见的最低照明强度为  $E_0 = 20 \text{ w/m}^2$

路灯的间距  $l$ ，路的宽度  $d=5$  米，路长  $L=260$  米。

## 四、组建模型：

### 1 一盏灯的模型

由物理学知识可知，被光线照射的物体的亮度依赖于它与光源之间的距离平方的倒数和

$$E_0 = \frac{ph}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

光线的投射角度。路灯到某点  $A$  的照明强度为：  
为灯的高度， $r$  为灯到点  $A$  的距离。

其中  $p$  为灯的功率， $h$

地面上物体可见的区域为：  
只有  $h \leq \sqrt{\frac{p}{E_0}}$  时上式有解，且

$$r \leq \sqrt{\left( \frac{ph}{E_0} \right)^{2/3} - h^2}$$

的区域物体

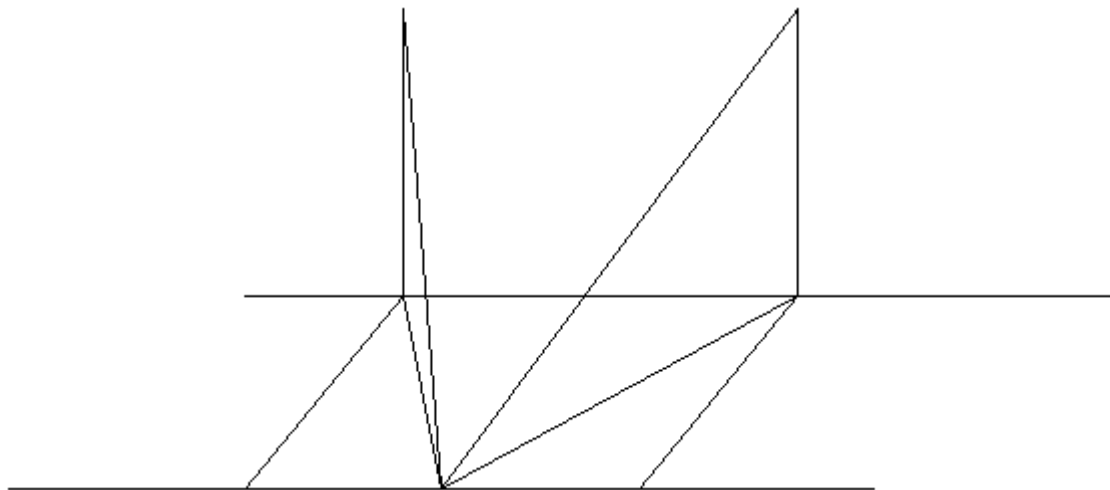
可见，物体可见区域的面积为以 O 为圆心，以  $\sqrt{\left(\frac{ph}{E_0}\right)^{2/3} - h^2}$  为半径的圆，其面积为：

$$s = \pi r^2 = \pi \left[ \left(\frac{ph}{E_0}\right)^{2/3} - h^2 \right]$$

对 s 关于 h 求导可得，当  $h^* = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \sqrt{\frac{p}{E_0}}$  时，面积达最大值，可求得

路灯得最优高度。已知  $h^* = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \sqrt{\frac{p}{E_0}}$  其中  $p=2200w$ ,  $E_0=20w/m^2$  可得最优高度 h 为 4.60 米。

**2 两盏路灯间距最小的的优化问题** 主要考虑当高度为何值时，两灯的距离可达最大值



如图，A 点的照度在路面的各点中最小，所以 l 和 h 的只需满足  $E_A \geq E_0$  即可。

$$E_A = \frac{2ph}{\left(0.25l^2 + h^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

其中 p 和 d 均为定值且 l 越大  $E_A$  越小，只需求当  $E_A$

最小时使 l 最大的 h 值。

$$\frac{4400h}{\left(0.25l^2 + h^2 + 25\right)^{3/2}} = 20$$

$$l = 2 \sqrt{\left(220h\right)^{2/3} - h^2 - 25}$$

解法：由

整理得：

对上式关于 h

$$l' = \frac{\frac{440}{\sqrt[3]{220h}} - 2h}{\left[ (220h)^{2/3} - h^2 - 25 \right]^{1/2}}$$

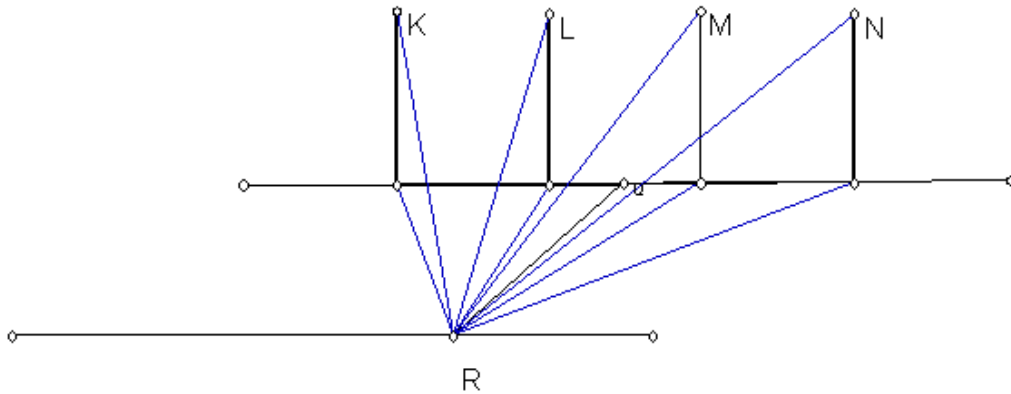
当  $h^4 = \frac{48400}{27}$  时

求导得由解得

取得最大值。即  $h=6.5$  米时， $l$  最大为 15.5 米。

**3 一排路灯的优化问题** 优化目的是确定路灯高度  $h$  和路灯之间的距离  $l$ ，使得路灯之间的距离最大。

1 求最大的路灯间距离



由上图可知,路灯  $l$  和  $m$  之间的路段,与中点  $Q$  相对的  $R$  点的照明强度最小,并且计算该点照明强度时,只需考虑路灯  $K,L,M,N$  对其的影响,其他较远的路灯对其的影响可忽略。

$$E = \frac{2ph}{\left( \frac{1}{4}l^2 + d^2 + h^2 \right)^{3/2}} + \frac{2ph}{\left( \frac{9}{4}l^2 + d^2 + h^2 \right)^{3/2}}$$

$R$  点的照明强度为

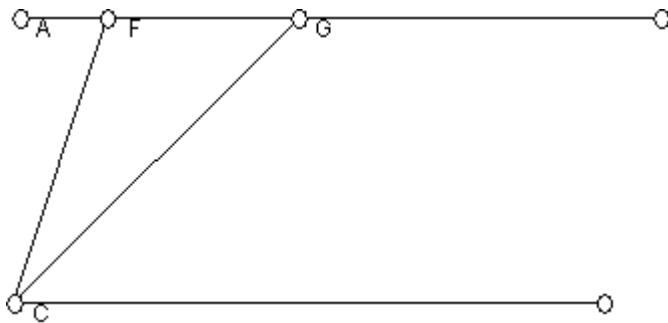
且要使  $R$

点的物体可见应有:  $E \geq E_0$ , 其中  $p=2200w$ ,  $d=5m$ ,  $E_0=20w/m^2$

求使得  $l$  最大的  $h$  值, 具体做法: 取一系列  $h$  值求使得  $E=E_0$  的  $l$  值, 比较  $l$  的大小取最大值。

解得  $h=6.6$  米时,  $l$  最大。最大值为 16.5 米。

2 考虑边界问题



$$E = \frac{ph}{\left(x^2 + d^2 + h^2\right)^{3/2}} + \frac{ph}{\left((x+l)^2 + d^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

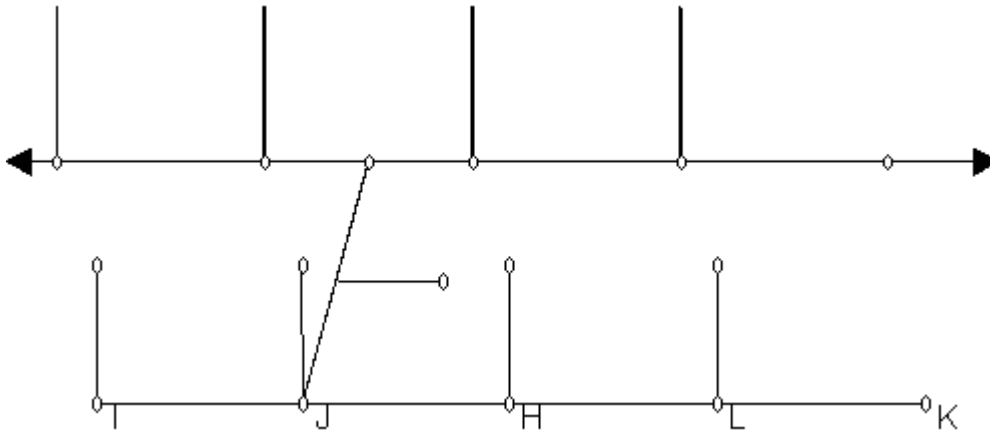
由  $E \geq E_0$ , 可解得:  $x=3.5$  时  $E=20$ , 此时  $x$  最大。

3 计算所需的总的灯数:  $260 \div 3.5 = 256.5$ ,  $256.5 = 15 \times 16.5 + 9$

因为  $9 > 3.5$ , 所以路的另一端还需一盏灯, 即所需灯的总数为 17 盏。

**四两排路灯的优化问题** 路灯的布点是否适当直接关系到照明的效果。双侧布灯大体有两种方式: 一种是对称布置, 另一种是交错布置, 各有优劣。对称布置的优点是比较美观, 但不足之处是照度不够均匀, 适合较宽的道路。交错布置美观上不如对称布灯, 但照度比较均匀。由于校内道路即使是干道也不很宽, 如果对称布置照度不均匀的缺点会更加突出, 所以事实上选择交错布置的方式更好。

1. 求最大的路灯间距



由图可知, 照明强度最低的点一定出现在路的中线上, 且对图中 AB 段照明强度呈周期性变化, 所以只需使 AB 的中点 C 照明强度大于等于  $20\text{w/m}^2$  即可。并且计算该点照明强度时, 只需考虑路灯 J, H, M, N 对其的影响, 其他较远的路灯对其的影响可忽略。

$$E = \frac{2ph}{\left(\frac{9}{16}l^2 + \frac{1}{4}d^2 + h^2\right)^{3/2}} + \frac{2ph}{\left(\frac{1}{16}l^2 + \frac{1}{4}d^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

C 点的照明强度为

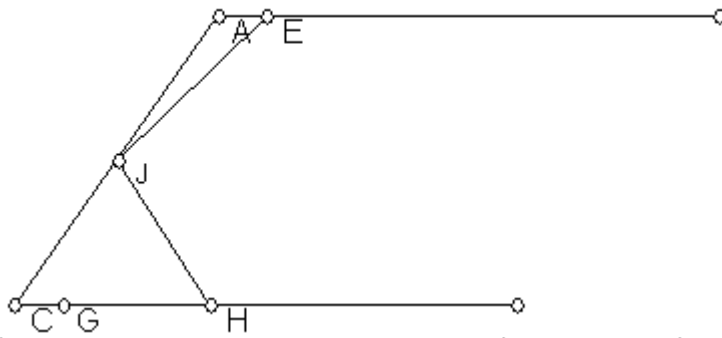
且

要使 C 点的物体可见应有:  $E \geq E_0$ , 其中  $p=2200\text{w}$ ,  $d=5\text{m}$ ,  $E_0=20\text{w/m}^2$

求使得  $l$  最大的  $h$  值, 具体做法: 取一系列  $h$  值求使得  $E=E_0$  的  $l$  值, 比较  $l$  的大小取最大值。

解得  $h=6$  米时,  $l$  最大。最大值为 36.9 米。

2 考虑边界问题



A, C 两点为路的边界，设距 A 点最近的灯 E 与 A 的距离为  $x$  米，则 J 点的照明强度为：（只考虑 E 和 H 两灯的影响）。

$$E = \frac{ph}{\left(x^2 + \frac{1}{4}d^2 + h^2\right)^{3/2}} + \frac{ph}{\left(\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}d^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

由  $E \geq E_0$ ，可解得： $x=6$  时  $E=20$ ，此时  $x$  最大。

### 3 计算所需的灯数

如图，在 AE 边上， $AE=6$  米， $260=6+36.9*6+32.6$ ，所以该边需装灯 7 盏，且另一端剩余 32.6 米。在 CG 边上  $CH=6+1/2=24.45$  米， $260=24.45+36.9*6+13.15$ ，所以该边装灯 7 盏时距另一端 13.15 米， $13.15 > 6$  米，所以该边还需一盏灯，即总需 8 盏。

综上，安装两排灯时所需总数为 15 盏。**五、结论**根据上述计算可知，安装两排灯时所需灯数较少，所以此种情况更能节约用电。

则该 A 路段长 260 米，宽 5 米，灯高 4 米，间距 18.56 米，灯的功率 2200 瓦，灯共计 15 盏。