寻求连接同一平面有限给定点距离和最小的点和网络

How to find the best point and the shortest web

队名 mathoe

队员　张　媛（女）　（广东实验中学（510000）　高一级学生）
武炳杰　　　　（mathoe 网站版主　　　　高二级学生）
（联系网站：www.mathoe.com
注册地址：广州市番禺区南村镇南大路 168 号华南新城内（511442））
指导老师　李启印（mathoe 网站主席）
（联系网站：www.mathoe.com
家庭地址：广州市番禺南大路 168 号华南新城碧泉 15-103（511442））

队名：mathoe

声明

Mathoe网站义务地为中国数学的普及和发展工作做了很大的贡献，本团队就是在该网站的帮助下建立的，贵赛事（丘成桐中学数学奖）也是在该网站显眼的帖子推荐后本团体才计划组队参赛。为此，在报告之前，本团体成员再次向mathoe网站表示由衷的感谢和敬意！故特此将声明置顶，并将团队名称一致命名为mathoe。

引言

我们的探索是从看了一份报道后开始的，报道是这样的，假设我们在北京、上海、西安三城市之间架设电话线，一种办法是分别联通北京——上海和北京——西安。另一种办法是选第四个点，假设郑州。由此分别向三城市架线，可能你不会想到第二种办法所用的电话线只是第一种办法的86.6%，即可取得比第一种办法节约13%的显著经济效益。 很巧，本文的作者之一武炳杰同学曾以此为核心内容制作展板，代表学校赴香港拔萃女中做展览，所以这就促动了我们进一步探索学习的决心。

摘要

本文的中心是如何寻求连接所有点距离和最小的点和连通图的最小网络的问题。本文先从初中学过的著名的Fermat点着手，接着以物理模型的思想着手，直观地解决了加权的斯坦纳问题，即寻找连接平面给定有限点距离和最短的点及其加权形式。接着我们又从数学角度，通过计算，寻求了加权Fermat点及其最小的长度的表达式，之后又一举解决了北京市高中应用数学竞赛有关铺地压轴题的推广。

但是我们考虑到在实际问题中，这类工程问题还是会遇到很多问题，而且当给定点数较多的时候，我们直接用数学便很难处理，我们将探索的中心放在了近似算法，其实也就是从寻求点变成了寻求网络。从特殊的正方形着手，开始探索连接四个点的斯坦纳树构造的方式，然后推演了波拉克定理的证明。但是，对于大于等于五个点，我们仍然无法系统地掌握寻求的方法，我们通过克鲁斯卡尔算法，即一般的最小网络构造的办法，在点数为三和四的比较之后，提出此时树的长度与理想的长度两者之比一定在某范围内，查阅资料后得知这就是著名的斯坦纳比猜想。

团队在认真仔细地阅读了堵丁柱教授发表在《数学传播》民国82年12月十七卷第四期的《谈谈G-P定理的证明》和越民义先生的文章以及他们对此猜想互相对对

方证明的质疑与答辩的相关文献后，决定以越民义先生的证明为主体，以中学生的角度给出了对斯坦纳比猜想的证明的推演。

关键词 加权的斯坦纳问题 波拉克定理 克鲁斯卡尔算法

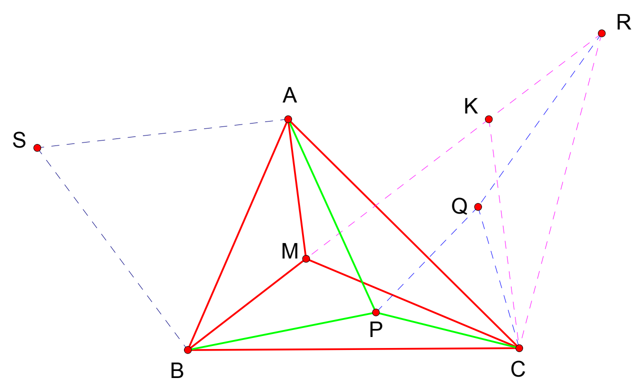
斯坦纳比猜想及证明 寻求最佳点 构造最佳网络

队名：mathoe

正文

我们探索这个话题是从一个小时候见过的一道平面几何题开始的，他就是著名的“费马点”问题。也是从“点”开始的第一步。

如图，A，B，C 是三个工厂，它们构成一个锐角三角形，需要在三角形内修一供气站，证明：当供气站对每两个厂的视角相等（即120°）时，所需铺设的管道最短。



分析：三角形 ABC 为锐角三角形，其中 $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$， P 为异于 M 的任一点，要直接证明点 M 分别与 A，B，C 三点连线之和小于点 P 分别与 A，B，C 三点连线之和，比较困难。其实只需进行适当的变换，将线段 MA, MB, MC 移到同一条直线上，并且首尾连接成一直线段，与此同时将线段 PA, PB, PC 移成一首尾相连的折线，且与前直线段有公共的端点，问题也就解决了。后面的内容也不难证明。

事实上，M 点为三角形 ABC 的Fermat点，当三角形 ABC 有一角 $\angle A \geqslant 120°$，Fermat点即为 A 点，这些都是不难证明的。

自然的，我们会想到若要连接平面有限多个点距离最小的点如何来寻找。起初尝试了直接寻找，发现困难重重。其实，联想到过去见过的物理模型便不难解决了。

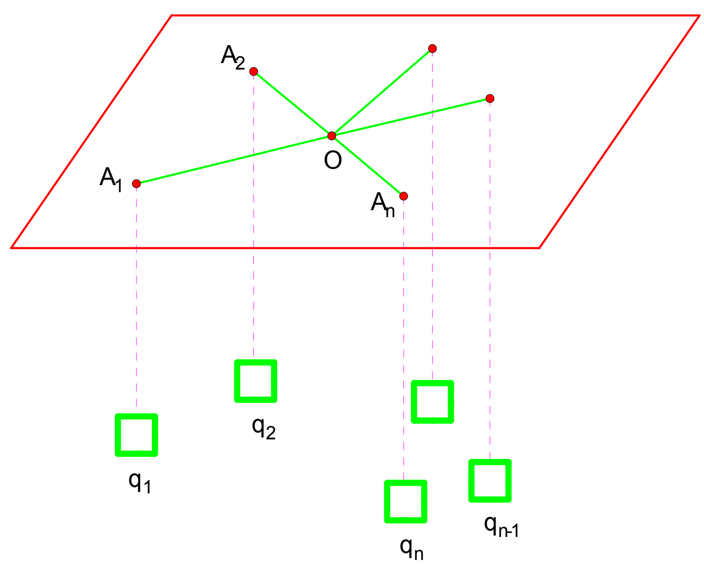
我们可以用物理方法（Physical Method）来解决这个数学问题。所谓物理方法，就是将数学问题用一个适当的物理模型（physical model）来描述，然后根据物理学原理来确定问题的解。在极值问题的物理解法中，常用的物理原理是：势能最小原理（Minimum Potential Energy Principle，当一个力学系统处于稳定的静止状

态时所具有的势能最小）和光行最速原理（the Principle of Light’s Swiftest Speed，在光学媒质中，光线由点A到B点所走的途径，是连接点 A 到点 B 的所有曲线中光学长度最短的一条）。下面先用势能最小原理来解Fermat点问题及连接多点的问题。

我们把三根一端系在一起的弹性细线的另一端分别固定在△ABC 的三个顶点处，当该力学系统处于平衡位置时，势能最小。而系统的势能可用细线长度之和度量（注意到弹性范围内，弹力与线长成正比），即 $PA+PB+PC$ 最小。

又若系统平衡时，P 不与某顶点重合（因△ABC 是锐角三角形，否则若某个角大于或等于120°时，P 就与该顶点重合），且作用于 P 点有三个相等的张力 T_1,T_2,T_3，它们的合力为0，故有 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$。所以 P 点是△ABC 的费马点。

对于这个问题推广成：在平面上任意给定的 n 个点 A_1，……，A_n，如何求一点 P 使得 $\sum_{i=1}^{n}|A_iP|$ 最小，这里 $|A_iP|$ 表示从 A_i 到 P 的距离。我们也可以为之设计出某种简单机械来求此 P 点。



其实，就是这个模型我们还可以处理这若干点的“加权”问题。这个问题的提法属于史坦豪因斯问题的一般化。

设平面上有n个点A_k，每个点的“权”（可以看成是人或物的数量）为q_k（k＝1，2，……，n），今欲求一点o，使该点距诸A_k的距离r_k与权q_k的乘积之和为最小。

设每根细线长为l（自结点到砝码重心之长），而平板下面的线长分别为l_k，显然$l_k = l - r_k$，则该系统势能之和为$\sum_{i=1}^{n} q_i(h-l_i)$最小（$h$为平板距地面的高度），即△$A'B'C'$最大。因若系统平衡时，$\sum_{i=1}^{n} q_i l_i$最大，又$l\sum_{i=1}^{n} q_i$为定值，从而若系统平衡时，$\sum_{i=1}^{n} q_i r_i$最小，此即说明系统平衡时的$o$是满足题设的点。

上文提到的物理模型直观解决，对于这种数学与物理的巧妙结合，我国已故的著名数学家陈省身教授更曾赋诗一首：

物理数学是一家，共同携手到天涯。

黑洞单极穷奥秘，纤维联络织锦霞。

进化方程孤立异，对偶曲率瞬息差。

筹算竟有天人用，拈花一笑不言中。

不过,这毕竟只是物理模型的支持,我们还是设法通过数学法将其精确计算出来,不妨先从3个点的加权算起。

该问题的表述是对任意给出的三个正数a_1，a_2，a_3和平面上三个点A_1，A_2，A_3，如何求一点F，使$a_1|A_1P|+a_2|A_2P|+a_3|A_3P|$为最小。我们把问题中的$F$点称为$A$，$B$，$C$的费尔马点。

我们可以照样寻找到该点,具体作法是这样的

设以a，b，c为边长可构成三角形，记为△$A'B'C'$，其三内角分别是$A'B'C'$，且ABC也是三角形，a，b，c为其三边之长。

（1）若$A+A'$、$B+B'$、$C+C'$中至少有一个不小于180°，不妨设$A+A'\geqslant 180°$。则费尔马点F为点A．此时，最小值为$b'c+c'b$。

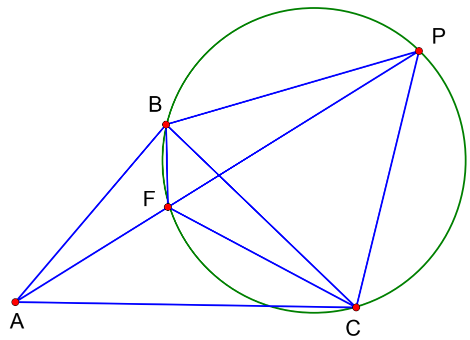
（2）若$A+A'$、$B+B'$、$C+C'$均小于180°，则△ABC内存在一点F，使得

$\angle BFC=180^{\circ}-A'$，$\angle CFA=180^{\circ}-B'$，$\angle AFB=180^{\circ}-C'$，且点 F 就是费尔马点。

我们将（2 ）中的 F 称为非平凡费尔马点，可用如下办法作出.

在$\triangle ABC$ 的边 BC 上向形外做$\triangle BCP$，使$\angle CBP=B'$，$\angle BCP=C'$

连结 AP，则 AP 与$\triangle BCP$ 的外接圆交点即为所求。



下面我们精确证明这个连接的长度

若 F 为非平凡费尔马点，则 $a'\cdot PB=c'\cdot BC$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[a^2\left(b'^2+c'^2-a'^2\right)+b^2\left(a'^2+c'^2-b'^2\right)+c^2\left(b'^2+a'^2-c'^2\right)+16SS'\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

其中 S,S' 分别为 ΔABC、$\Delta A'B'C'$ 的面积。

证明:因 F,B,P,C 共圆,由托勒密定理有:

$$PC\cdot FB+PB\cdot FC=BC\cdot PF \qquad (2)$$

易知$\triangle BCP\backsim\triangle A'B'C'$,得 $\frac{PC}{b'}=\frac{PB}{c'}=\frac{BC}{a'}$

$\therefore a'\cdot PC=b'\cdot BC$, $\therefore a'\cdot PB=c'\cdot BC$,

代入(2),得 $b'\cdot FB+c'\cdot FC=a'\cdot FP$

$\therefore l=a'\cdot FA+a'\cdot FP=a'\cdot AP$

在$\triangle PCA$ 中,由余弦定理有

$$a'^2\cdot AP^2=a'^2\cdot AC^2+a'^2\cdot PC^2-2a'^2\cdot AC\cdot PC\cdot\cos\left(C+C'\right) \qquad (3)$$

于是 $l^2=a'^2b^2+b'^2a^2-2aa'bb'\cos\left(C+C'\right)$

注意到 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，$S'=\frac{1}{2}a'b'\sin C'$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad \cos C'=\frac{a'^2+b'^2-c'^2}{2a'b'}$$

代入(3),整理立即得到(1)式。

其实类似的问题求极值在现实生活中的非线性规划中也很有用,下面请看一例,这个问题的来源是第二届北京高中应用数学知识竞赛决赛压轴题。

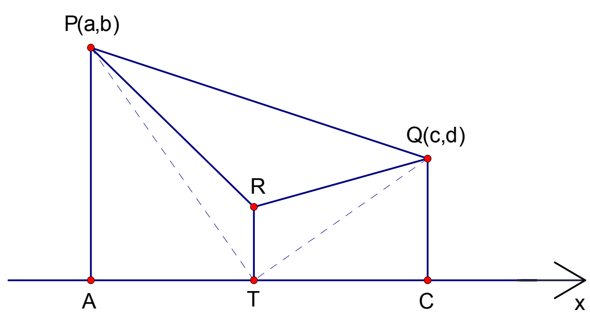
数学的分析计算使问题得解决变得直接。

有一条河，工厂P,Q位于河岸X（直线）的同一侧，已知工厂坐标$P(a,b)$，$Q(c,d)$（a，b，c，d为非负数，$a<c$）。现规划在河的工厂一侧选一点R，在R处修建一个水泵站，从R修建直线水管分别到河岸与工厂．如果水泵站到河岸的总水管每千米的修建费是λ（$\lambda>0$）元，到工厂P，Q的分水管每千米的修建费为u元、v元（u，$v>0$），请选定R的位置，使修建水管的总费用最小，并求出这个费用。

解:如图，设水泵站为$R(x,y)$（$0\leqslant a\leqslant x\leqslant c$，$y\leqslant b$，$y\leqslant d$），

修建水站总费用为$\lambda TR+uRP+vRQ$,

即 $$f(x,y)=\lambda y+u\sqrt{(x-a)^2+(b-y)^2}+v\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2} \qquad (1)$$



①若$\lambda\geqslant u+v>0$，连TP，TQ，修建水管总费用

$\lambda TR+uRP+vRQ\geqslant(u+v)TR+uRP+vRQ=u(RP+TR)+v(TR+RQ)$

$>uTR+vTQ$。

以上不等式指明,不必建总水管TR,水泵建在河岸x轴上,此时$y=0$,

函数(1)成为 $f(x,0)=u\sqrt{(x-a)^2+b^2}+v\sqrt{(c-x)^2+d^2}$

对照光的折射定理理解此问题, 因 $\frac{1}{c_1}=u$, $\frac{1}{c_2}=v$, 有 $u\sin\theta_1=v\sin\theta_2$

其中 $\theta_1=\angle PTR$, $\theta_2=\angle RTQ$, 按光的折射定理修建的水泵站应在河岸 AC 上，切偏向千米水管修建费高的那个工厂

②若 $u+v>\lambda>u$, $v>0$, 不难通过求极值, 将(1)变形为

$$f(x,y)\geqslant u(x-a)\sqrt{1-m^2}+v(c-x)\sqrt{1-n^2}+umb+vnd$$

$$=(c-a)u\sqrt{1-m^2}+umb+vnd$$

这里 m,n 是绝对值小于1的待定常数, 满足

$$\begin{cases}um+vn=\lambda\\u\sqrt{1-m^2}=v\sqrt{1-n^2}\end{cases}\qquad(2)$$

解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{2\lambda u}\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)\\n=\frac{1}{2\lambda u}\left(\lambda^2-u^2+v^2\right)\end{cases}$ （3）

式（3）中，显然 $m>0$， $n>0$，计算 $1-m$

$$=\frac{1}{2\lambda u}\left(2\lambda u-\lambda^2-u^2+v^2\right)=\frac{1}{2\lambda u}\left[v^2-(\lambda-u)^2\right]=\frac{1}{2\lambda u}(v+\lambda-u)(v-\lambda+u)\geqslant 0$$

所以，$0<m<1$。

同理，$0<n<1$。

故函数 $f(x,y)$ 有最小值

$$f(x,y)\geqslant u(x-a)\sqrt{1-m^2}+v(c-x)\sqrt{1-n^2}+umb+vnd$$

$$=(c-a)u\sqrt{1-m^2}+umb+vnd$$

等号当且仅当 $\begin{cases}y-b=-\frac{(x-a)m}{\sqrt{1-m^2}}\\y-d=-\frac{(c-x)n}{\sqrt{1-n^2}}\end{cases}$ (4) 时成立

将（2）代入(4)有$\begin{cases} b-y=-\dfrac{(x-a)m}{\sqrt{1-m^2}} \\ d-y=-\dfrac{(c-x)\dfrac{nv}{u}}{\sqrt{1-m^2}} \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=\dfrac{amu+cnv}{\lambda}+\dfrac{(b-d)u}{\lambda}\sqrt{1-m^2} \\ y=\dfrac{bnv+dmn}{\lambda}+\dfrac{(a-c)v}{\lambda}\dfrac{mn}{\sqrt{1-m^2}} \end{cases}$ （5）

将（3）代入(5)有

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2\lambda^2}\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)+\dfrac{c}{2\lambda^2}\left(\lambda^2-u^2+v^2\right)+\dfrac{b-d}{2\lambda^2}\sqrt{4\lambda^2u^2-\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)^2} \\ y=\dfrac{b}{2\lambda^2}\left(\lambda^2-u^2+v^2\right)+\dfrac{d}{2\lambda^2}\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)+\dfrac{a-c}{2\lambda^2}\cdot\dfrac{\lambda^4-(u^2-v^2)^2}{\sqrt{4\lambda^2u^2-\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)^2}} \end{cases} \quad (6)$$

还应检查条件$a<x<c$, 须满足

$$\frac{\lambda^2-u^2+v^2}{\sqrt{4\lambda^2u^2-\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)^2}}>\frac{d-b}{c-a} \quad (7)$$

与$\dfrac{\lambda^2+u^2-v^2}{\sqrt{4\lambda^2u^2-\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)^2}}>\dfrac{b-d}{c-a}$ （8）

如果(7)与(8)满足, 则当(6)时, 修建水管有最低费用, 为

$$f_{\min}=umb+vnd+(c-a)u\sqrt{1-m^2}$$

$$=\frac{b}{2\lambda}\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)+\frac{d}{2\lambda}\left(\lambda^2-u^2+v^2\right)+\frac{c-a}{2\lambda}\sqrt{4\lambda^2u^2-\left(\lambda^2+u^2-v^2\right)^2} \quad (9)$$

此时, 我们按(6)确定水泵站R。如果式(7)(8)有不满足, 则(6)出错, 这是水泵站建在离河岸近的那个工厂处, 例如工厂Q离河岸近($b<d<0$), 水泵站建在工厂$Q(c,d)$处, 修建水管的总费用是

$$\lambda CQ+uQP=\lambda d+u\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

最后借用这里的公式解答第二届北京高中应用数学知识竞赛决赛压轴题。

先令$\lambda=u=v$将公式化简:

检查条件(7)(8)是$\frac{1}{\sqrt{3}}>\left|\frac{b-d}{a-c}\right|$,

式(6)是$\begin{cases} x=\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(b-d) \\ y=\frac{b+d}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}(a-c) \end{cases}$

式(9)是$f\min=\left[\frac{b+d}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(c-a)\right]\lambda$,

水管总长的最小值是$\frac{b-d}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(c-a)$。

原题中,工厂P和Q距河岸分别为10千米与8千米,两工厂相距14千米,由于

$\sqrt{14^2+(10-8)^2}=8\sqrt{3}$,故可知工厂$P(0,10)$，$Q(8\sqrt{3},8)$,满足$\frac{1}{\sqrt{3}}>\left|\frac{10-8}{0-8\sqrt{3}}\right|$。

水泵站R $\begin{cases} x=\frac{0+8\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(10-8)=5\sqrt{3} \\ y=\frac{10+8}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}(0-8\sqrt{3})=5 \end{cases}$

水管总长的最小值是$\frac{10+8}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(8\sqrt{3}-0)=21$。

我们在考察以上的问题后发现一个比较现实的问题,这样的考察计算即使寻求到了最小的一点,在实际生活中万一遇上高山沙漠也就无法施工了,况且当n变得较大时，用数学法寻找此点也变得很困难。所以,我们设法从近似的角度考察这一系列的问题。

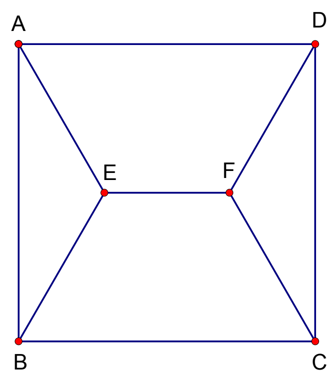
其实这许多现实问题都牵涉同一个数学问题，就是如何寻求连接同一平面有限给定点距离和最小网络，这也是组合优化学科中的一个著名的问题——斯坦纳树（Steiner tree）问题。

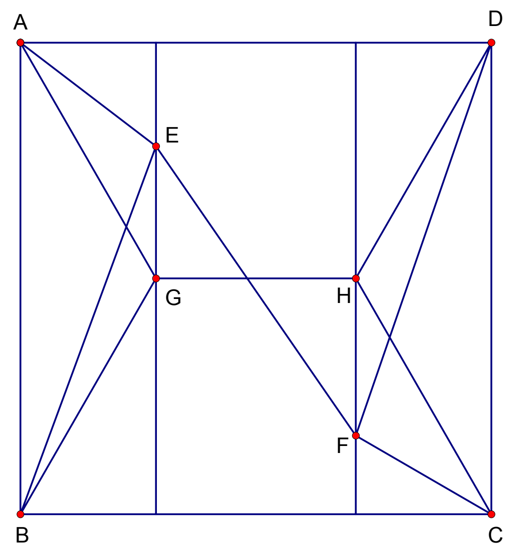
经查阅资料知,这个源远流长的问题曾引起许多数学家的注意,数学甚至物理学上许多闪耀的明星都曾对这个问题做过研究或补充，到了1934年，亚尔尼克（V•Jarnik）和克斯勒（M•Kossler）才提出我们现在所说的斯坦纳树问题：对于

平面上任意给定的n个点A_1，……，A_n，如何求出连接这n个点的一个最小网络。即所引进的不是一个P点，而是一些线段构成的连接这n个点的最小连通网络。而原来的斯坦纳树问题便成为一个特例。

我们首先可以把这个问题在四个点的情况时做一番考虑。

问题这样表述:A，B，C，D四个城市恰为一个正方形的四个顶点,要建立一个公路系统,使每两个城市之间都有公路相通,并使整个公路系统的总长为最小,问:这条公路该如何设计?





结果为$AE+EB+EF+FC+FD$。理由如下：如果线段和最短，其中连接AC的折线肯定会与连接BD的折线相交。假设它们公共部分为EF（不排除E，F重合的情况），由于两点间直线最短，所以AE，BE，EF，FC，FD肯定是直线；E肯定是$\triangle ABF$的Fermat点，不然的话，我们用$\triangle ABF$的Fermat点代替E就可以得到更短的路线；

同理，F也是$\triangle CDE$的Fermat点。

这样只能有$\angle ABE=\angle FEA=\angle FEB=\angle EFD=\angle EFC=\angle CFD=120^\circ$。

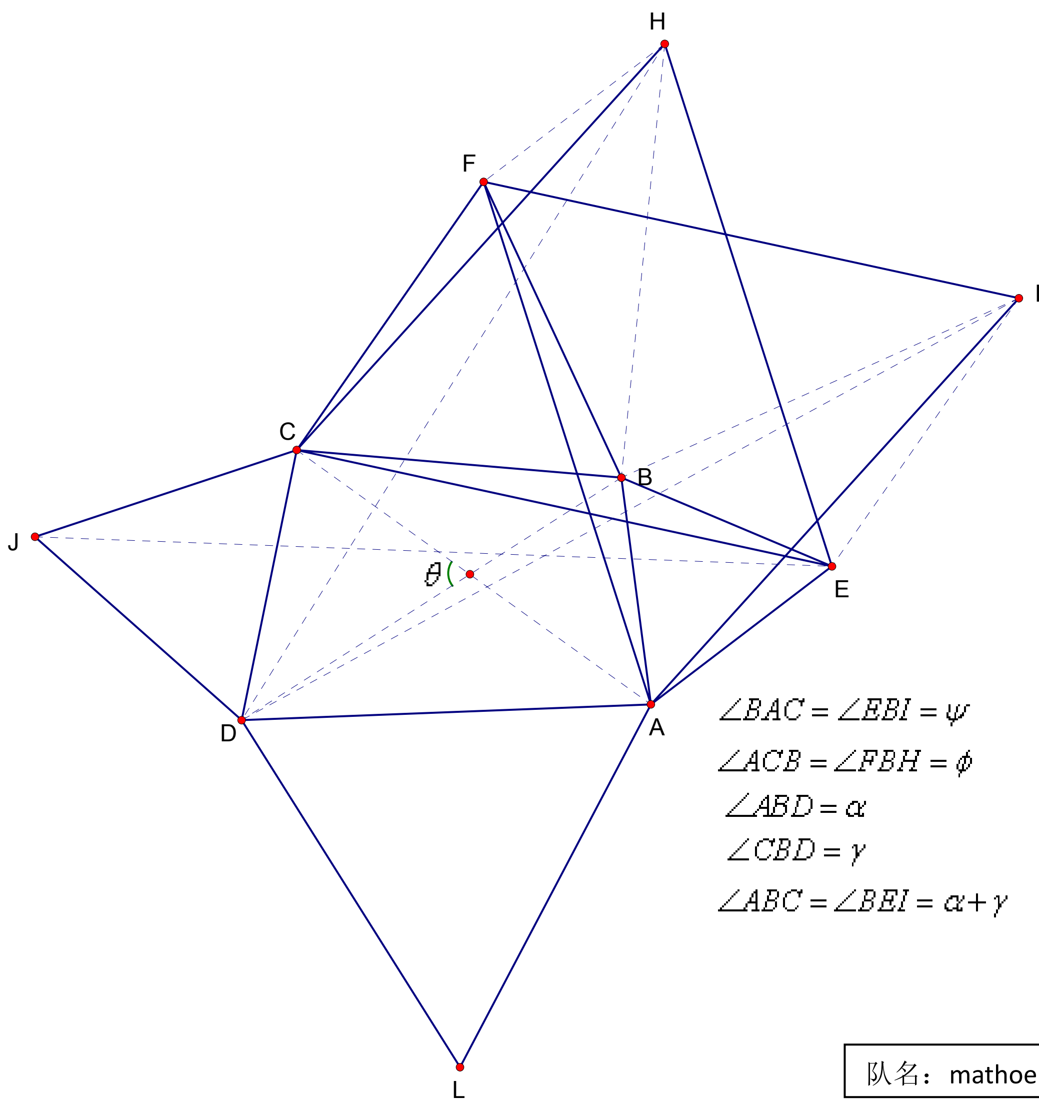
当然，上面的解答还不完整，就是没有考虑E不在$\triangle ABF$内部的情况。我们可以进一步证明如下：为了线段和最短，EF必须平行于正方形的一边，且EF位于正方形对称轴上。如上面那个图，选取GH平行于BC，且位于垂线的中点，我

们可以调整 E,F 为 G,H 得到新的折线。显然，$AE+EB \geqslant AG+GB$；$EF \geqslant GH$；$FG+FD \geqslant HC+HD$，也即新的折线更短。如果 $EF \perp BC$，则我们可以在另外那个方向调整。经过这一步调整，肯定可以把问题化为上面那种情况。

下面考察的是不规则四边形，这定理被称为波拉克定理。

波拉克定理　设 A,B,C,D 为四个所与点，它们构成的四边形的两条对角线的交角分别为 θ 和 $180^\circ-\theta$。又设此四点的两株满（拓朴）斯坦纳树都存在。

若 $\theta \leqslant 90^\circ$，则两株斯坦纳树中最短的一株为位于两条对角线的交角为 O 的那一区域内的一株。



$\triangle DCJ$，$\triangle AEB$，$\triangle CBF$，$\triangle DAL$，$\triangle CEH$ 和 $\triangle AFI$ 都是正三角形，

$\theta \leqslant 90^\circ$，因 $\angle JCE = 60^\circ + \angle DCE = \angle DCH$，有 $BH = BI$ 和 $JE = DH$

同理，由 $\angle FBH = \phi = \angle BCA$ 和 $LF = DI$，

故欲证 $JE \leqslant LF$，只需证 $DH \leqslant DI$。

首先先证 $BH = BI$,

这个可以通过△ FAB ≌△ IAE 及△ HFB ≌△ ABC 得到 $BI = AC$。

类似地，由△ HFB ≌△ ABC，

故得到 $\angle FBH = \phi = \angle BCA$， $BH = AC$。

于是，得 $BH = BI$。

在△ DBH 与△ DBA 中， DB 公共。 $BH = BI$,

$\angle DBH = 60^\circ + r + \phi = 60^\circ + 0^\circ$,

$\angle DBI = 60^\circ + a + \phi$

由于 $a + \phi = 180^\circ - 0^\circ \geqslant 0$, 故得 $ID \geqslant DH$，此即所要证明者。

需要注意的是，若 A, B, C, D 四点位于一个1×2的矩形的顶点上，则易看出，这四点只有一株斯坦纳树。因此，对于同一 n，即使在非退化的情况，斯坦纳树的数目也不一定都相同。

考察凸五边形及更多边，由于可能性极多，无法一下子处理，想到了采用近似算法。

定义:最小生成树，即一个给定的点集 X 的最小生成树(Minimum Spanning Tree)，或最小支撑树，记作 $\mathrm{MST}(\mathrm{X})$。设 $G = G(V, E)$ 是一个图，V 是它的顶点所成的集，E是它的边所成的集，也就是 V 中每一点对的连线所成的集。要保证此图为连通图且所连边长之和最小的图即称为最小生成树。

下面给出对于任何图都能通用的一种做最小生成树的办法,称为克鲁斯卡尔(J。B。KRUSKAL)算法

克鲁斯卡尔算法

设 $n = [p_1, ..., p_n]$ 为一给定的点集。求出一连接 p_1，……， p_n 的一最小生成树的克鲁斯卡尔算法如下。

1、将 P_i 和 P_j 的连线之长 $I(p_i p_j)$——求出，将这 $\frac{n(n+1)}{2}$ 条线段按短到长的顺序排成序列，设为 $l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant l_4 \leqslant \cdots\cdots \leqslant l_n \leqslant \cdots\cdots$。

2、先取 l_1, 设 $l_i = l(p_i p_j)$。在图上画出连接 P_i 和 P_j 的直线段，再取 l_2，如法炮制。但需保持不使这些连线所成之图不出现圈。若 l_1，……，l_k 已经取定，在将 l_{k+1} 对应的连线加上时，出现了圈，则将此 l_{k+1} 舍去。往下继续进行，直到所有的 p_i 皆已连上为止。

由此图法，如此所得之图 G 必为 N 之一生成树。现用归纳法来证明它为最小。若 $n=3$，则结论显然。现设结论对 $n-1$ 成立。在 N 中将 p_i 除去，则在 G 中也就是将线段 $p_i p_j$，除去，得图G’。由作图法和归纳法假设，G' 即为连接 $\frac{n}{p_{i1}}$ 的最小生成树。现将 p_{i1} 加上去，即得 N。由于 l_1 是最小的 l_i，因此 G 也就是 N 的最小生成树。

我们现在要考察的是这种最小生成树与斯坦纳最小树的比例，就是实际值与近似值的比大小在什么范围之内。我们经过简单计算发现3点和加权3点都满足 实际值与近似值的比大于等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

其实这就是著名的斯坦纳树比的猜想。

我们可以这样表述：设X为平面上给定的 n 个点所成之集。两点 $A[X_1,Y_1]$ 和 $B[X_2,Y_2]$ 之间的距离定义为 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。令 $Ls(x)=L(SMT(x))$ 和 $Ls(x)=L(MST(x))$ 分别表示X的斯坦纳最小树和最小支撑树之长，则有

$$Ls(X) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(X) \qquad ①$$

据我们查阅资料所知，这个猜想的证明有一波三折，如吴振奎，吴健，吴旻教授主编的天津教育出版社2007年版的《数学大师的创造与失误》的第234就有相关介绍：“1992年旅美学者堵丁柱与美籍数学家黄光明博士撰文宣称P-G猜想（就是斯坦纳树

比的猜想）获证，而后国内外媒体相继报道，因而轰动数学界，堵、黄二人亦在国内获奖。四年后，《运筹学杂志》发表了越民义先生的文章，对于堵、黄二人的工作提出质疑，尔后两人撰文答辩，同期杂志又发表越先生对于二人文章的答复（几乎是否定了两人的工作），孰是孰非，留待大家分辨”。

我们有幸也查阅到了堵丁柱教授发表在《数学传播》民国82年12月十七卷第四期的《谈谈G-P定理的证明》。在本文中，我们下面还是主要采用查阅到的越民义先生的证明，我们简略后，重新编演了其中的主要过程。

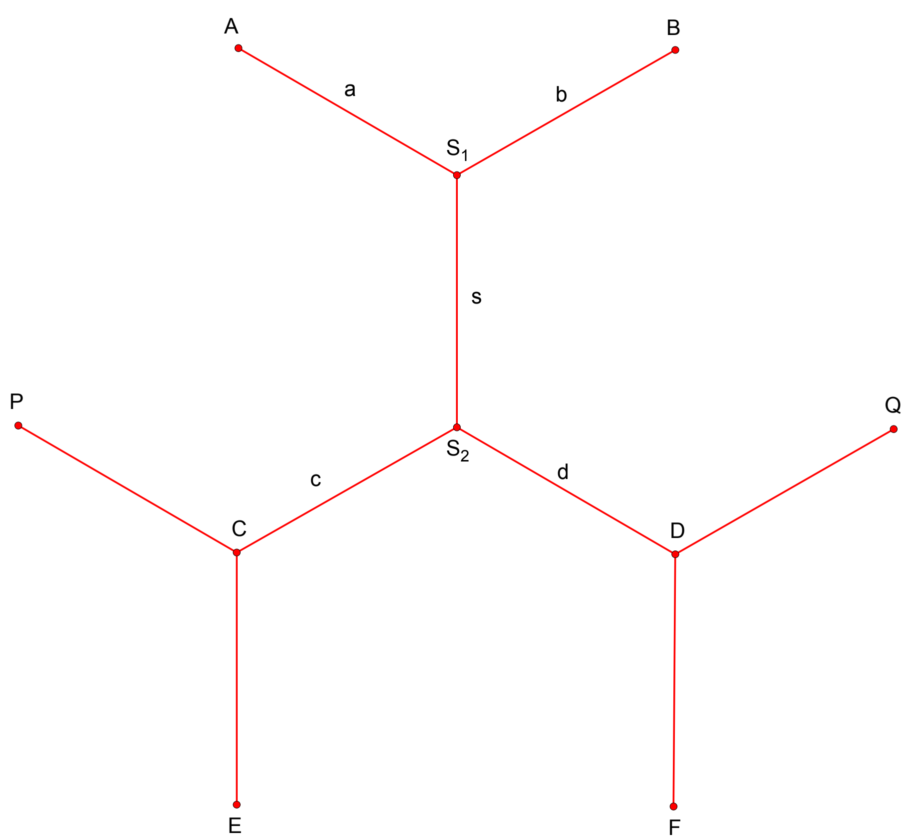
在正式证明此定理之前做两点假定：

（1）不妨设在 X 的斯坦纳最小树 $T=SMT(X)$ 中，所有 X 中的点都是叶子，称为终端，即各点的度数皆为1。

（2）不妨设 X 的 $SMT\left(X\right)$ 上必存在下图所示的一分支。如果不存在，可在 C 或 D 加上一个无穷小的分支即可。

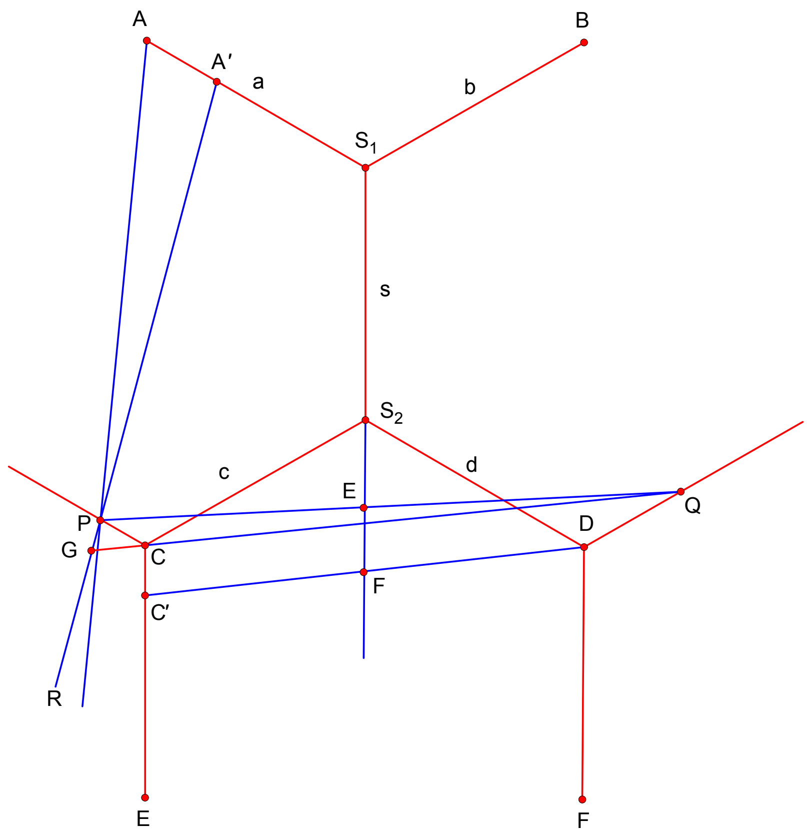
队名：mathoe

下面是用归纳法对斯坦纳比猜想定理的证明。



先用反证法,假设不等式①不成立。即存在一点集X，使$L_S(X)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}L_M(X)$,这时就必存在一个点数最少的$X$，使得$\frac{L_S(X)}{L_M(X)}<\frac{\sqrt{3}}{2}$。

队名：mathoe



如图的字母标注及其各边长,其中令A，B，（P，Q）是X中的点，S_1，S_2，C，D（可能也包含P，Q）为斯坦纳点。

我们不妨设$c>d$故作$C'D\perp CC'$，$C'D=\frac{\sqrt{3}}{2}(c+d)$

再不妨设$a\leqslant b$，$a^2+ab+b^2=1$令$PC=tc$，$DQ=td$

不难证明$\min\{AP+PQ'+Q'B,AP'+P'Q+QB\}$

$$\leqslant AP+PQ+QB\leqslant\max\{AP+PQ'+Q'B,AP'+P'Q+QB\}$$

通过平面几何的关系可以得到下面几个等式。

$$AP^2 = s^2 + sc + c^2 + a(s-c) - tc\left[2a + s - (1+t)c\right]$$

队名：mathoe

$$BQ^2 = s^2 + sd + d^2 + b(s-d) - td\left[2b + s - (1+t)d\right]$$

$$PQ^2 = \frac{3}{4}(1+t)^2(c+d)^2 + \frac{1}{4}(1-t)^2(c-d)^2$$

我们还得证明以下2个事实

事实1：

其实在证4个点的时候，就建立直角坐标，这样就有了

$$(2s+a+d)(2s+b+c) \geqslant 3(a+d)(b+c)$$

以此我们可以得到这个推论

$$s \geqslant 0.366\min\{a+d, b+c\}$$

事实2：

（1）当 $a \leqslant b$，$a^2+ab+b^2=1$ 时, 有 $s+c+d < \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-b\right)\left(2a+b-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{a+2b-\sqrt{3}}$

（2）若 $s+c+d \geqslant \lambda a$，则有 $\left[(2\lambda+1)a-\sqrt{3}\right]\sqrt{1-\dfrac{3}{4}a^2}+1.75 \leqslant \sqrt{3}\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)a+1.5a^2$

这里要运用关于 X 的假设, 我们用 $S' = L_S(A,C,D)$， $X' = X - \{B\}$

我们运用这些不等关系

$$\frac{\sqrt{3}}{2}L_M(X') \leqslant L_S(X') \leqslant L_S(X) - (s+a+b+c+d) + s'$$

可以得到 $s+a+b+c+d-s' < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

而通过图中计算知 $s' = \sqrt{a^2 + a(s+c+d) + (s+c+d)^2}$

从而（1）便不难证明了。（2）只要考察 λ 与 a 单调增减的关系便能从（1）中不难得到。

下面我们用反证法，如果$\frac{Ls\left(X\right)}{L_M\left(X\right)}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

因为$L_S\left(X\right)-a-b-c-d+s+C^{'}D$为连通图$X\setminus\left\{A,B\right\}$的

队名：mathoe

故由归纳假设知

$$L_S\left(X\right)-a-b-c-d+s+C^{'}D$$

$$\geqslant L_S\left(X\setminus\left\{A,B\right\}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}L_M\left(X\setminus\left\{A,B\right\}\right)$$

如果我们得到$a+b+c+d+s-C^{'}D\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(AP+BQ\right)$

则可以由以下式子推出矛盾

$$L_M\left(X\right)>\frac{2}{\sqrt{3}}Ls\left(X\right)$$

$$\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left[L_S\left(X\right)-a-b-c-d-s+C^{'}D+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(AP+BQ\right)\right]$$

$$\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}L_M\left(X\setminus\left\{A,B\right\}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(AP+BQ\right)\right]$$

$$\geqslant L_M\left(X\right)$$

所以我们只要证明$a+b+c+d+s-C^{'}D\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(AP+BQ\right)$

而且我们不难类似知道, 我们也知道只需证明下式也可以。

$$a+b+c+d+s\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(AP+AB\left(\text{或}PQ\right)+BQ\right)$$

而且我们必须注意到$AB=1$

下面我们分情况, 尝试证明上两式之一

Ⅰ 当$c\geqslant a$，$d\geqslant b$，$s\leqslant a$，$s\geqslant\min 0.366\left(a+b,b+c\right)\geqslant 0.366\left(a+b\right)$时,

有 $a+c+\frac{s}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{a+b}+AP\right)$， $b+d+\frac{s}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{b}{a+b}+BQ\right)$

队名：mathoe

这里我们只需证明其中一个式子即可，我们来证第一个式子。

由于 $AP^2=s^2+sc+c^2+a(s-c)-tc\left[2a+s-(1+t)c\right]$

代入第一个不等式, 两边做差, 对 c 求导后得到 $\Delta_c^{'}=2c+11a+s-\frac{4\sqrt{3}a}{a+b}>0$

只需令 $c=a$, 然后证明 $13a^2+2as+\frac{3a^2}{1+ab}\geqslant\frac{4\sqrt{3}a}{a+b}\left(2a^2+\frac{1}{2}as\right)+2s^2$。

由于 $c\geqslant a$， $d\geqslant b$， $s\leqslant a$， $s\geqslant\min 0.366(a+b,b+c)\geqslant 0.366(a+b)$。

且上式两边关于 a 单调递增, 令 $a=0.48$, 从而 $a+b=1.1495$

代入知 $s\leqslant 1.1445a$ 。

当 $s\geqslant 1.1445a$, 故 $c\geqslant a$， $d\geqslant b$， $c+d=l\geqslant a+b$,

我们来证 $a+b+c+d+s\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(AP+1+c+d)$

我们可以两边平方后两边做差, 发现差关于 s 单调递增, 可令 $s=0.366(a+b)$

再次代入做差, 发现关于 $a+b$ 单调递降, 由于 $a+b\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}=1.1547$,

将等号时代入得 $5.964ab+1.902ac+0.0718l^2+0.7624l$

$$\geqslant 4.098a^2+3c^2+1.098bc \quad ②$$

再将 $c\leq b$ 的等号条件代入，化简得 $11.964ab+0.0718l^2+0.7624l\geqslant 4.098$

容易验证 $l\geqslant 0.48$， $a\geqslant 0.44$ 时成立。

由前面所证的事实2我们可以知道, $a\geqslant 0.48$， $l\geqslant a+b\geqslant 1.495$

②式左右之差关于 c 单调递减, 当 $c\leqslant 1.2b$ 时, 可以将等号代入,

令 $l=1.1495$, 得 $11.964ab-1.5396b^2\geqslant 3.1267$

显然 $a\geqslant 0.48$ 时上式成立, 故第一部分的情况得证。

Ⅱ 当$t \leqslant \dfrac{1}{6.5}$，$c < a$，$0.1a \leqslant d \leqslant b$，$s \leqslant 0.366(a+b)$

队名：mathoe

或$s \leqslant a$，$s > 0.366(a+b)$时成立。

我们只需证明$a+c+\dfrac{s}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(AP+EP)$及$b+d+\dfrac{s}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(BQ+EQ)$

这里的E是S_1S_2与PQ的交点。

其实我们只需证第一个式子即可,第二个式子可以类似地对称证明。

由几何关系,我们知道$PE = \dfrac{c}{c+d}PQ$, $EQ = \dfrac{d}{c+d}PQ$。

令$\alpha = \dfrac{PQ}{c+d}$,则$PE = \alpha c$，$EQ = \alpha d$

将AP延长到R使得$PR = PE = \alpha c$,

于是只需证$a+c+\dfrac{s}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \alpha c$

由于$AP + \alpha c$作为t的函数的单调递增的,于是可令$t = \dfrac{1}{6.5}$。

从而$PA(A') \mathbin{/\!/} S_1S_2$,故$A'P = c+s$, $a = \left(1+\dfrac{1}{6.5}\right)c$

故只需证$a+c+\dfrac{s}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c+s+\alpha c)$

等价于$0.366s \leqslant a - \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\alpha)-1\right]c$

利用$PQ^2 = \dfrac{3}{4}(1+t)^2(c+d)^2 + \dfrac{1}{4}(1-t)^2(c-d)^2$,

得0.9985≤α ≤1.0851时成立。也即a ≥0.4581

下面再分情况,若$s = 0.366(a+b)$,

由于$a \geqslant 0.3575$，$a+b \geqslant 1.1296$, 故$s \geqslant 0.4134$,

当$a=0.43$时，$s \geqslant 0.9615a$。由于$c=\frac{13}{15}a$, 可假定$c+d \geqslant a$, 即$d \geqslant \frac{2}{}a$。

队名：mathoe

由事实2的(2), 在$\lambda \geqslant 1.9615$时我们可以知道, 事实2的式子中左边=2.1072，右边=2.1106,

故必有$a \geqslant 0.43$。且若$d \geqslant \frac{a}{4}$, 可得$a \geqslant 0.4580$。

于是, $d \geqslant \frac{a}{4}$，$s \leqslant 0.366(a+b)$时成立。

现设$s \geqslant 0.366(a+b)$, 由事实2的(1), 我们有$a \geqslant 0。43$。设$c=\frac{13}{15}a$, 令$d=\frac{a}{4}$,

则 $\alpha \leqslant 1。02622$, 代 入 $0.366s \leqslant a-\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\alpha)-1\right]c$, 即 得 $0.366s \leqslant 0.3459a$, 且若d增大, 即得$s \leqslant a$。

于是, 当$s \leqslant 0.9451a$, $c=\frac{13}{15}a$时命题成立。

当$a>\frac{15}{13}c$时, 容易验证$a-\frac{\sqrt{3}}{2}AP$关于a单调递增。故由上面的推算知成立。

故在情形Ⅱ的中, 原命题得证。其实除了情形Ⅱ, 其余皆可由对称性化为情形Ⅰ

队名：mathoe

尾声

由于参赛作品的主体在暑假才陆续完成，故文章的主题主要有电子邮件及书信的交流。所以，在参赛过程中，团体成员更学会了互相努力拼搏，互相鼓励学习的精神。

当然，由于斯坦纳比猜想的证明目前我们还没搜索到一种完全得到公认的证法，所以我们以赵民义先生的证法为主体，以中学生的角度，编演了一套斯坦纳比猜想的证明。我们也努力完善其中的分类讨论，及不等式的计算证明。

由于时间较短，此证明的编演过程唯恐也有疏漏，本来文末打算排入一些有关的格点网络上的最小连接问题的些许探索，由于能力时间有限，打算等探索更有突破的时候再做整理归纳，所以在今后的学习生活中，我们也努力在这方面及证明的优化方面多做探索。

所以，参加贵赛事，不仅让我们领略到数学花园之美之大之有用，更加给我们赛后数学的学习及探索指明了方向。在此向赛事主委会表示感谢，也愿今后我团队对此问题或其他数学问题的探索能献出一己之力。

参考文献

[1] 南秀全　《怎样寻求最佳点》[J]　湖南教育出版社

《数学竞赛》第3辑　1989年8月出版

[2] 李康海　《加权费尔马问题的最小值公式》[J]

《中等数学》1998年第2期

[3] 雷动良　《利用一类极值解三个名题》[J]

《中等数学》2001年第1期

[4] 堵丁柱　《谈谈Gilbert-Pollak定理的证明》[J]

《数学传播》民国82年12月十七卷第四期

[5]赵民义 《最小网络》[M] 上海科学技术出版社 2006年11月出版

鸣谢

感谢mathoe网站对本团队的组建及指引参加贵赛事所做的帮助与指导！

队名：mathoe

感谢mathoe主席李启印老师对本团队的探索期间的指导与无微不至的帮助！

感谢本团队两位学生的父母在我们参加比赛期间的帮助鼓励与支持！