

平面上二次曲线的研究

郑铮, 吴越, 温培钧

广东实验中学, 广州, 510000

摘要: 我们将全体平面二次曲线看成一个集合, 将它与 $P\mathbb{R}^6$ 对应起来, 由此赋予其几何结构, 并利用这个几何结构证明了给定平面上不多于五点, 至少有一条平面二次曲线过这些点; 如果给定点的个数多于 5 个, 则一般情形下不存在同时过这些点的平面二次曲线。另外, 定义了平面二次曲线的几个不变量, 然后用这些不变量, 给出了曲线分类的简单方法。

§1 引言

直线是一次曲线, 过平面上的两点决定唯一的一条直线。自然的我们要问二次曲线的情形如何? 即我们有如下问题: 1. 平面上的几个点决定一条二次曲线? 2. 给定点的位置与曲线分类有何关系?

一般地, 二次曲线的方程为:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

由于上述方程在差一个非零因子时他们定义同一条曲线, 由此我们猜测过平面上五个点决定唯一一条二次曲线。

通常, 对于给定点确定二次曲线的问题, 待定系数法是行之有效的方法, 并且可以采用计算机辅助研究, 但这种方法缺乏启发性。我们的办法是将所有的二次曲线与一个 5 维空间的点对应起来, 把过一个给定点的曲线的全体, 看成是这个 5 维空间的子空间, 从而将代数问题, 转化为这个空间的几何问题。即我们把几个点决定一条二次曲线的问题化为几个子空间交于一点的问题。

二次曲线分为退化和非退化两种情形。当其为非退化二次曲线时, 又分为椭圆、双曲和抛物三种情形。我们能否有一种简单的办法给出给定曲线的分类? 即从方程本身判断其是那种二次曲线。

二次曲线的分类问题, 通常的办法是通过坐标变换, 把其化为标准型来判断其类型。尽管这种办法行之有效, 但其运算太过麻烦。两条曲线在平移和旋转下如果重合, 则几何上可以看成相同的曲线。我们按照这种观点, 给出了二次曲线在平移变换和旋转变换下的不变量, 并用这些不变量, 给出了二次曲线分类。

我们的办法可以推广到一般的 d 次曲线问题。但美中不足的是，没有给出一种简单的办法刻画给定点的位置与由这些点确定的二次曲线的类型，我们希望以后通过学习和研究，能够发现这种关系。

§2 二次曲线与空间中的点

用 \mathcal{C} 记二次曲线的集合， \mathcal{P} 记二元二次多项式的集合， $\mathbb{R}^6 = \{(x_1, \dots, x_6) | x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 6\}$

定义映射

$$F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^6$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \longmapsto (a, b, c, d, e, f)$$

与

$$G : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$(a, b, c, d, e, f) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

易证 $F \circ G = id_{\mathbb{R}^6}$, $G \circ F = id_{\mathcal{P}}$ ，即 \mathcal{P} 与 \mathbb{R}^6 是一一对应的。任给二元二次多项式

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

则

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | p(x, y) = 0\}$$

是一条二次曲线，因而我们可以定义映射

$$E' : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \longmapsto C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | p(x, y) = 0\}.$$

由于我们已有映射

$$G : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathcal{P},$$

因而我们定义

$$E : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$E = E' \circ G.$$

\mathbb{R}^6 有类似于 \mathbb{R}^3 和 \mathbb{R}^2 的几何性质，如在 \mathbb{R}^6 中可以定义直线、平面等几何体。我们自然希望能够用 \mathbb{R}^6 的几何性质来刻划全体二次曲线。然而，由于 $\forall p \in \mathcal{P}, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, rp 定义的二次曲线与 p 定义的二次曲线相同，所以我们无法建立 \mathcal{C} 与 \mathbb{R}^6 的一一对应。为了克服这个困难，我们引入如下记号。

任取 $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$ ，定义 $[a, b, c, d, e, f] = \{(ra, rb, rc, rd, re, rf) | r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ ，用 $P\mathbb{R}^5$ 记集合 $\{[a, b, c, d, e, f] | (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6\}$ 。由于对一个给定的二元二次

多项式 $p = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, $F(rp) = (ra, rb, rc, rd, re, rf)$ 。而 rp 与 p 定义同一条二次曲线, 因而我们可以定义

$$\begin{aligned}\tilde{E}: P\mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathcal{C} \\ [a, b, c, d, e, f] &\longmapsto C,\end{aligned}$$

其中 C 是由多项式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 定义的二次曲线。反之, 我们可以定义映射

$$\begin{aligned}H: \mathcal{C} &\longrightarrow P\mathbb{R}^5 \\ C &\longmapsto [a, b, c, d, e, f],\end{aligned}$$

其中 C 为 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 定义的二次曲线。可以验证

$$\begin{aligned}H \circ \tilde{E} &= id_{P\mathbb{R}^5} \\ \tilde{E} \circ H &= id_{\mathcal{C}}.\end{aligned}$$

如此, 我们建立起了 $P\mathbb{R}^5$ 与 \mathcal{C} 的一一对应。

§3 过定点的二次曲线与空间的点

给定 \mathbb{R}^2 中点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 令 $\mathcal{C}_{(x_0, y_0)}$ 为过此点的二次曲线的集合。即

$$\mathcal{C}_{(x_0, y_0)} = \{C \in \mathcal{C} \mid C \text{ 过点 } (x_0, y_0)\}.$$

设 C 是由 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 定义的二次曲线。由于 C 过点 (x_0, y_0) , 所以

$$ax_0 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0. \quad (1)$$

由 (1) 式知

$$H(\mathcal{C}_{(x_0, y_0)}) = \{[a, b, c, d, e, f] \in P\mathbb{R}^5 \mid ax_0 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0\}$$

我们知在 \mathbb{R}^3 中过原点的平面方程为

$$Ax + By + Cz = 0$$

类比我们可以将 $H(\mathcal{C}_{(x_0, y_0)})$ 看成是 $P\mathbb{R}^5$ 中的平面。设 (x_j, y_j) , $1 \leq j \leq k$ 为 \mathbb{R}^2 中给定的 k 个点, 则是否存在一条二次曲线过此 k 个点的问题转化为 $\bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_{x_j, y_j}$ 是否为空集的问题。

为解决这个问题, 我们引进自由度的概念。

如果一个问题需要由至少 n 个变量来刻画, 我们就称之为有 n 个自由度。如 \mathbb{R}^3 有 3 个自由度, \mathbb{R}^2 有二个自由度, \mathbb{R}^6 有 6 个自由度。明显地 $P\mathbb{R}^5$ 比 \mathbb{R}^6 少一个自由度, 因而其有 5 个自由度, 单个点或有限个点的自由度为 0, 我们定义空集的自由度为 -1。

$\bigcap_{j=1}^k C_{x_j, y_j}$ 是自由度为 5 的 k 集合的交, 类比 \mathbb{R}^3 的情形, 其自由度为 $5-k$, 所以, 当 $k \leq 5$ 时, $\bigcap_{j=1}^k C_{x_j, y_j}$ 不空, 当 $k > 5$ 时 $\bigcap_{j=1}^k C_{x_j, y_j} = \phi$ 。

由此, 我们得到如下的结论

定理 3.1 给定点平面上 $z_1 \cdots, z_k$, 的个数 $k \leq 5$, 则至少存在一条二次曲线过此 k 个点; 若给定平面上点 $z_1 \cdots, z_k$, 的个数 $k > 5$, 且 $\forall j \neq j', C_{x_j, y_j} \neq C_{x_{j'}, y_{j'}}$, 则平面上不存在过此 k 个点的二次曲线。

§4 不变量与曲线的分类

若两条曲线经过平移或旋转后重合, 我们称之为几何上是同一条曲线。本节我们按照这种观点, 给出平面二次曲线的分类。

设曲线 C 是由如下方程定义的二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (2)$$

其中的系数 2 纯粹是为了计算的方便, 并没有本质的含义。

我们将曲线方程的系数排成方阵

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad (3)$$

称之为曲线的定义矩阵。给定如上矩阵, 我们定义与之相应的二元二次多项式 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, 由此多项式定义的曲线称之为由此矩阵定义的二次曲线。由此, 我们给出二次曲线与其定义矩阵的一一对应。给定一条二次曲线, 我们用其定义矩阵 (3) 定义量

$$D = acf + 2bed - d^2c - e^2a - b^2f,$$

$$T = a + c,$$

$$E = ac - b^2,$$

我们称之为曲线的不变量。

定理 4.1 若 $D = 0$, 则二次曲线退化为两条直线。

此结论只是一个分解因式问题, 由于其证明只需要复杂的计算, 对我们的问题没有启发性, 为了节省篇幅, 我们在此不给出其详细证明。

由于退化的二次曲线实质上是直线问题, 我们以后仅讨论非退化的情形, 即 $D \neq 0$ 的情形。

从 D 的定义看出, 若 $D \neq 0$, 则可以很自然的推出 a, b, c 不能同时为 0。

对于给定的二次曲线 (2), 下面我们证明其不变量 D, T, E 在平移和旋转变换下不变, 这也是我们之所以称之为不变量的原因。

在平移变换

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

的作用下, 曲线方程化为

$$\begin{aligned} & a(x' + \alpha)^2 + 2b(x' + \alpha)(y' + \beta) + c(y' + \beta)^2 + 2d(x' + \alpha) + 2e(y' + \beta) + f \\ &= ax'^2 + 2bx'y' + 2cy'^2 + 2(a\alpha + b\beta + d)x' + 2(c\beta + b\alpha + e)y' + a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + 2d\alpha + 2e\beta + f \end{aligned}$$

与之相应的定义矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b & a\alpha + b\beta + d \\ b & c & c\beta + b\alpha + e \\ a\alpha + b\beta + d & c\beta + b\alpha + e & a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + 2d\alpha + 2e\beta + f \end{pmatrix}$$

经过简单的计算, 其相应的不变量 D', T', E' 满足

$$D' = D$$

$$E' = E$$

$$T' = T$$

所以 D, T, E 在平移作用下不变。

在旋转变换

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

下, 曲线方程化为

$$\begin{aligned} & a(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + 2b(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + c(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 \\ &+ 2d(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + 2e(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + f \\ &= (a \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta + b \sin 2\theta)x'^2 + 2\left(\frac{c-a}{2} \sin 2\theta + b \cos 2\theta\right)x'y' + (a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - b \sin 2\theta)y'^2 \\ &+ 2(d \cos \theta + e \sin \theta)x' + 2(e \cos \theta - d \sin \theta)y' + f \end{aligned}$$

与其相应的定义矩阵为

$$\begin{pmatrix} a \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta + b \sin 2\theta & \frac{c-a}{2} \sin 2\theta + b \cos 2\theta & d \cos \theta + e \sin \theta \\ \frac{c-a}{2} \sin 2\theta + b \cos 2\theta & a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - b \sin 2\theta & e \cos \theta - d \sin \theta \\ d \cos \theta + e \sin \theta & e \cos \theta - d \sin \theta & f \end{pmatrix}.$$

计算与其相应的不变量 D'', E'', T'' , 我们有如下等式

$$D'' = D, E'' = E, T'' = T$$

所以经过旋转变换后, D, T, E 也是不变的。

由此我们证明了如下定理。

定理 4.2 由曲线的定义矩阵定义的量 D, T, E 在平移和旋转作用下不变。

按照 Klein 的观点, 给定一条平面二次曲线, 由其定义矩阵定义的量 D, T, E 是此曲线重要的不变量。我们下面用此不变量来刻画平面二次曲线的分类。

我们知道, 经过平移和旋转变换后, 这些曲线可以化为如下几种情形, 其中出现的系数 a, b 均为不等于零的常数。

$$1. a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

其定义矩阵为

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

与之相应的不变量为

$$D = -a^4b^4, T = a^2 + b^2, E = a^2b^2.$$

$$2. a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$$

其定义矩阵为

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

与之相应的不变量是

$$D = a^4b^4, T = a^2 - b^2, E = -a^2b^2$$

$$3. 2y = ax^2,$$

其定义矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

与之相应的不变量为

$$D = -a, T = a, E = 0.$$

另外, 在平移变换和旋转变换下, 还有一种特殊的情形。

$$4.a^2x^2 + b^2y^2 = -a^2b^2$$

其相应的定义矩阵为

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2b^2 \end{pmatrix}$$

与之相应的不变量是

$$D = a^4b^4, T = a^2 + b^2, E = a^2b^2.$$

这明显是空集，但由于其由二元二次多项式定义的，我们仍称之为二次曲线。

由我们的讨论知，集合 \mathcal{C} 的自由度为 5，平移变换的自由度为 2，旋转变换的自由度等于 1。几何上两条曲线在经过平移和旋转变换后，如果重合，我们称之为几何上相同。对给定的任意一条平面二次曲线 $C \in \mathcal{C}$ ，用 $[C]$ 记与之几何相同的全体平面二次曲线，记 $\bar{\mathcal{C}} = \{[C] | C \in \mathcal{C}\}$ 。可以看出 $\bar{\mathcal{C}}$ 的自由度为 2。

尽管 D, E, T 有三个变量，但由于 $\frac{E^3}{D^2}, \frac{T^3}{D}, \frac{ET}{D}$ 他们满足方程 $xy - z^3 = 0$ ， D, E, T 有 2 个自由度。所以我们可以用 D, T, E 来刻画几何上相同的二次曲线。如此，我们得到如下结论。

Theorem 4.3 若 $D < 0, E > 0$ ，曲线为椭圆；若 $D > 0, E < 0$ ，曲线为双曲线；若 $E = 0$ ，则曲线为抛物线；若 $D < 0, E < 0$ ，则曲线是空集。

Abstract This paper has two parts. The first part is that a geometric structure is given on the set \mathcal{C} of the plane conic curves by an one-one and onto map from \mathcal{C} to $P\mathbb{R}^6$. By this geometric structure, we prove that for given k points in the plane, if $k \leq 5$, there is at least one conic curve through these points; if $k > 5$, in general there isn't any conic curves through these points. The second part is that some invariants of a given conic curves is defined. By these invariants, we give a simple method to classfy conic curves.