

开窗通风的优化设计

中国人民大学附属中学

赵昕玥 何博硕 李泰伯

ABSTRACT

The problem of making the air flowing to the room maximized by rotating the windows, with 2 and 3 blades respectively, was investigated in the paper. The mean volume of air blowing into the room was calculated under the assumption of wind blowing from different directions with equal chance and the most rational way of opening windows, which allows the most wind in, by using Pascal programs on the computer. The optimal design of the windows was found after comparing maximum value of wind quantity in two situations.

摘要

本文很好地解决了一个重要而实际的问题：如何通过合理地搭配旋转式窗户的叶片才能是到达室内的风量最大。我们考虑了一扇窗分别有两个叶片和三个叶片的情况，假定风从不同方向等可能的吹来，通过简单的微积分计算确定了特定的叶片旋转方式到达室内风量的平均大小，并利用计算机 Pascal 语言的辅助计算出了最合理的开窗方式，即到达室内风量最大的开窗方式。最后通过比较两种情况下的风量的最大值，确定了窗户设置方式的最优方案。

一、问题的提出

随着人们对于自身健康给予越来越多的关注，开窗通风换气已经日益成为人们居室生活中的重要环节。无论是炎炎夏日还是隆冬时节，适当的开窗通风换气无疑都在我们生活中扮演着异常关键的角色。由于人们每天有大量的时间在室内度过，可以说，良好的室内空气流通状况是人们保持健康的决定性因素。因而合理的通风就成为一个重大的课题。



(图 A)

(图 B)

目前普遍流行的旋转式窗户主要可以分为两扇对开式（图 A）和三叶式（图 B）。两种形式中都有两扇可以绕固定轴活动的叶片。两叶片之间不同的转动方式会在一定程度上相互影响，阻挡一部分空气流入室内，使真正到达室内的风量产生变化。如何通过合理的组合叶片的位置，使得到达室内的风量最大，这是一个非常重要而实际的问题。

本文就是围绕这个问题展开的。

二、模型假设和说明

虽然不少地区有着特定的盛行风向，但是考虑到建筑物对空气流动的影响，以及居民住宅区内树木和设施对于流向的影响，我们不妨假定风从各个方向等可能地吹来。由于一扇面南的窗户不可能接收来自偏北方向的气流，于是对于一扇固定

的窗户，我们只考虑风从窗户敞开方向 180° 范围内吹来的情况。

进一步简化模型，忽略次要因素，我们不妨假定风是类似于太阳光线的平行气流且只有水平速度，同时忽略玻璃的厚度，并认为空气与玻璃之间不存在反射作用。

我们只考虑一扇窗户（含两个或三个叶片）的情况。

考虑到开关窗户的实际情况，我们假定每个叶片至多可打开与窗台成直角。

三、模型的建立和求解

我们分两种模型进行讨论。为了便于比较，我们设两种窗户的总宽度均为 1。进入室内的风量大小用平行气流与窗台交出的线段长短（在第二种模型中除去与中间叶片相交的部分）来表示。

1、 两叶窗对开式模型

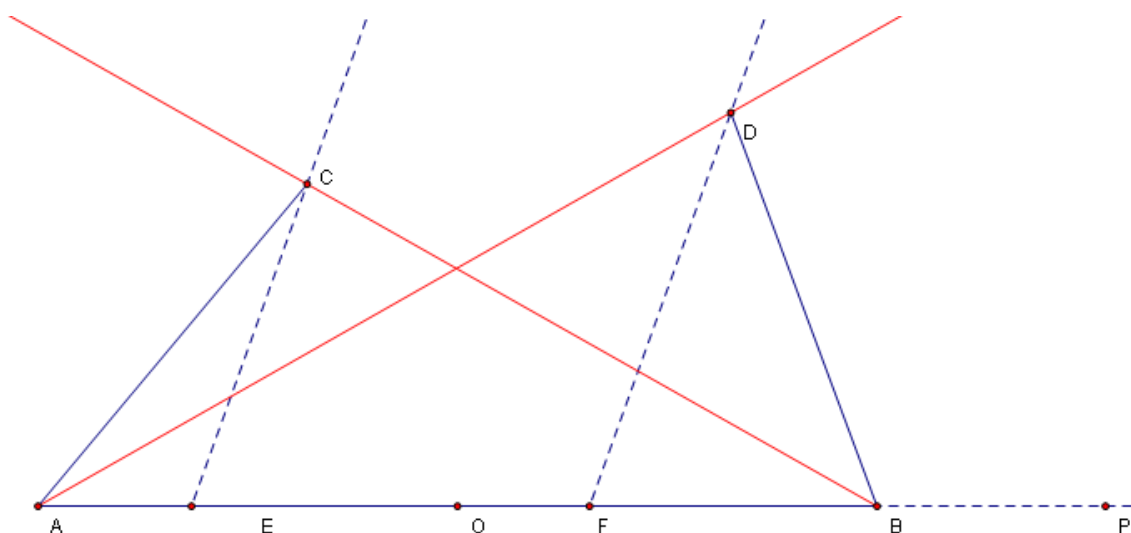


图 3-1

如图 3-1，AB 表示窗台，O 表示窗户的中棱。

令 $AB=1$ ，则 $AO=AC=BO=BD=\frac{1}{2}$ 。

记 $\angle CAO=\alpha, \angle DBP=\beta$ ，

则有 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ；

记角 r 为风向与射线 AP 的交角，有 $r \in [0, \pi]$ ；

记风与 AB 所交线段长度为 $f(r)$ 。

我们考虑两种不同的情形。

(一) 当两扇窗打开的角度相差不大时，如图 3-1-1，有 $\angle CAB \geq \angle DAB$ ，
 $\angle DBA \geq \angle CBA$ 。(图中红线标识出了此时临界状态的风向) 此时可以
 认为两个叶片对于风的阻挡相对较小。

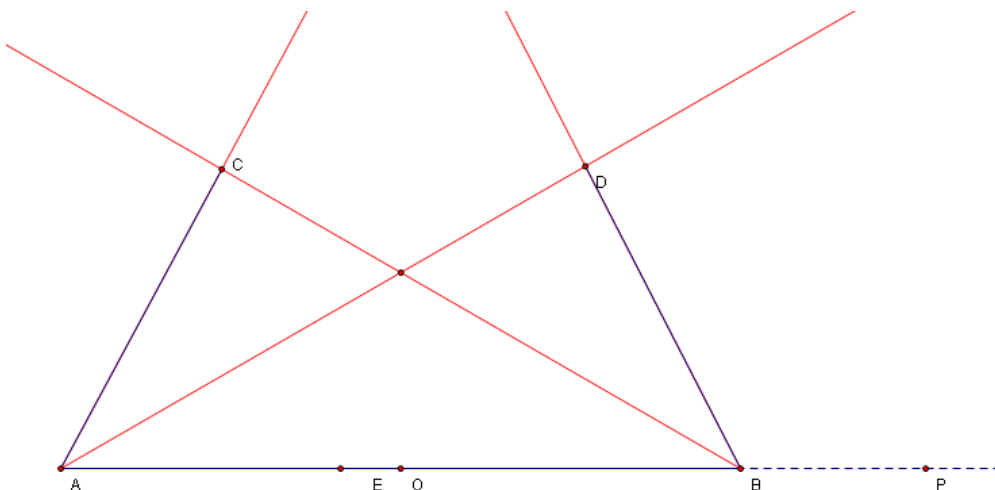


图 3-1-1

分以下五种情况讨论：

1) 当 $0 \leq r < \angle DAB$ 的时候，风均被 DB 页片挡住，即有

$$f(r) = 0$$

记 $\angle DAB = r_1$ ，是这种情况的临界角。

注意到在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理

$$\frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle DAB} = \frac{AB}{BD} = 2,$$

而 $\angle BDA = \angle DBP - \angle DAB = \beta - r_1$

即

$$2 = \frac{\sin(\beta - r_1)}{\sin r_1} = \frac{\sin \beta \cos r_1 - \sin r_1 \cos \beta}{\sin r_1},$$

从而

$$\sin r_1 (2 + \cos \beta) = \cos r_1 \sin \beta;$$

$$\therefore \tan r_1 = \frac{\sin \beta}{2 + \cos \beta},$$

注意到 $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\therefore \sin \beta \in [0, 1]$, $\cos \beta \in [-1, 0]$

$$\therefore \frac{\sin \beta}{2 + \cos \beta} \geq 0$$

即有

$$r_1 = \arctan \frac{\sin \beta}{2 + \cos \beta}$$

2) 当 $\angle DAB \leq r < \alpha$ 时, 此时 AC 叶片对进入室内的风量没有影响。

令 $r_2 = \alpha$ 是这种情况的临界角。

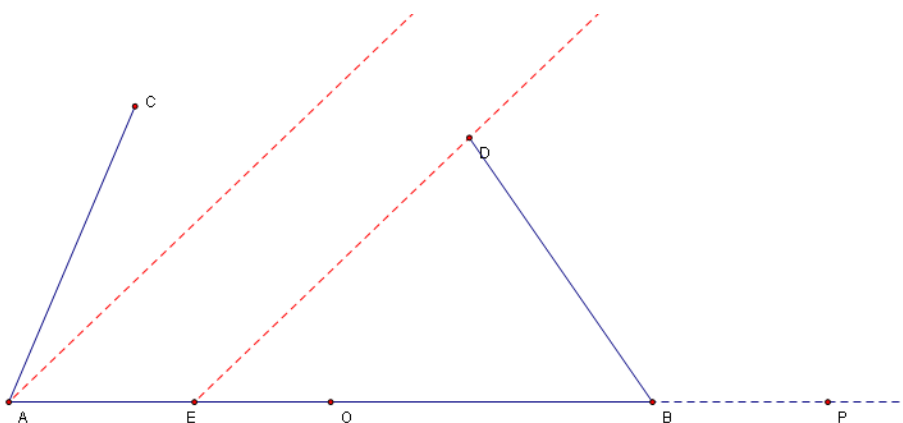


图 3-1-2

如图 3-1-2, 有

$$f(r) = AE = AB - BE。$$

在 $\triangle EDB$ 中使用正弦定理，有

$$BE = \frac{\sin(\beta - r)}{\sin r} \cdot BD,$$

代入已知数据，有

$$f(r) = AB - BE = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - r)}{\sin r},$$

整理得

$$f(r) = -\frac{1}{2} \sin \beta \cot r + \frac{1}{2} \cos \beta + 1;$$

3) 当 $\alpha \leq r < \beta$ 时，令 $r_3 = \beta$ 为此时的临界角。

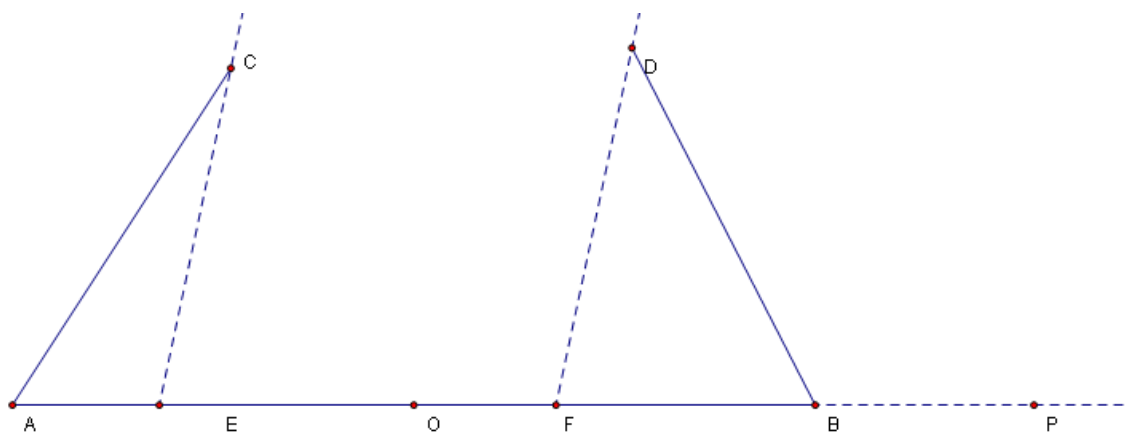


图 3-1-3

如图 3-1-3，有

$$f(r) = EF = AB - AE - BF。$$

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle DFB$ 中分别使用正弦定理，有

$$AE = \frac{\sin(r - \alpha)}{\sin r} \cdot AC,$$

$$BF = \frac{\sin(\beta - r)}{\sin r} \cdot BD,$$

代入已知数据，有

$$f(r) = \frac{1}{2} \left[2 - \frac{\sin(r-\alpha)}{\sin r} - \frac{\sin(\beta-r)}{\sin r} \right],$$

整理得

$$f(r) = \frac{1}{2} [(\sin \alpha - \sin \beta) \cot r + (2 - \cos \alpha + \cos \beta)];$$

4) 当 $\beta \leq \alpha < \angle CBP$ 时, BD 叶片对进入室内的风量没有影响。

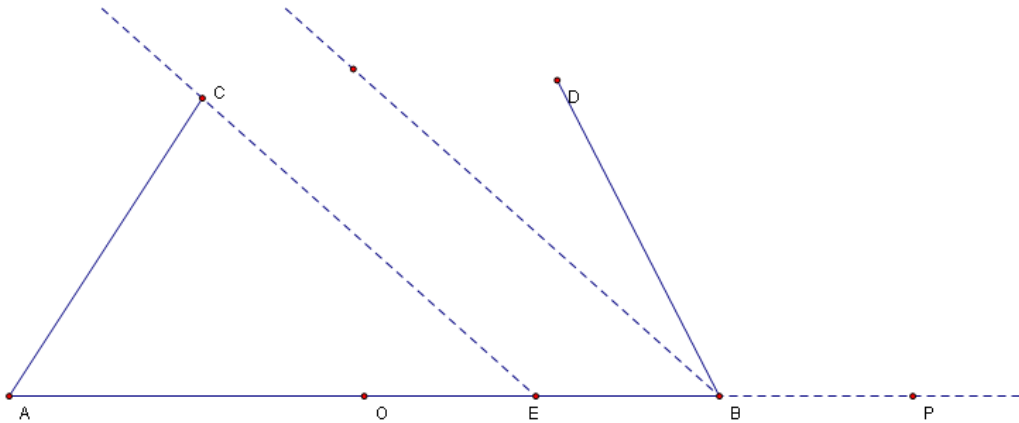


图 3-1-4

如图 3-1-4, $f(r) = BE = AB - AE$,

在 $\triangle ACE$ 中使用正弦定理, 有

$$AE = \frac{\sin(r-\alpha)}{\sin(\pi-r)} AC,$$

代入已知数据, 有

$$f(r) = AB - AE = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin(r-\alpha)}{\sin r},$$

整理得

$$f(r) = \frac{1}{2} \sin \alpha \cot r - \frac{1}{2} \cos \alpha + 1;$$

5) 当 $r \geq \angle CBE$ 时, 气流均被 AC 挡住, 与 1) 类似有

$$f(r) = 0,$$

记 $\angle CBE = r_4$ ，是这种情况的临界角。

在图 3-1-1，注意到在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理

$$\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle CBA} = \frac{AB}{AC} = 2,$$

而 $\angle ACB = \angle CBE - \angle CAB = r_2 - \alpha$ ， $\angle CBA = \pi - r_2$

即有

$$2 = \frac{\sin(r_2 - \alpha)}{\sin(\pi - r_2)} = \frac{\sin r_2 \cos \alpha - \cos r_2 \sin \alpha}{\sin r_2},$$

从而

$$\sin r_2 (\cos \alpha - 2) = \sin \alpha \cos r_2;$$

$$\therefore \tan r_2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 2},$$

注意到 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ， $\therefore \sin \alpha \in [0, 1]$ ， $\cos \alpha \in [0, 1]$

$$\therefore \tan r_2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 2} \leq 0$$

$$\therefore r_2 = \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 2} + \pi$$

综上所述，

$$f(r) = \begin{cases} 0, r \in [0, r_1) \\ -\frac{1}{2} \sin \beta \cot r + \frac{1}{2} \cos \beta + 1, r \in [r_1, r_2) \\ \frac{1}{2} [(\sin \alpha - \sin \beta) \cot r + (2 - \cos \alpha + \cos \beta)], r \in [r_2, r_3) \\ \frac{1}{2} \sin \alpha \cot r - \frac{1}{2} \cos \alpha + 1, [r_3, r_4) \\ 0, [r_4, \pi] \end{cases}$$

从而此时平均进风量（记为 $F(\alpha, \beta)$ ）为（令 $r_5 = \pi$ ）

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^4 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi - 0} = \frac{\sum_{i=0}^4 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi}$$

由于

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c \quad (c \text{ 为常数}),$$

从而有

$$\int_{r_1}^{r_2} f(r) dr = -\frac{1}{2} \sin \beta \ln \left| \frac{\sin r_2}{\sin r_1} \right| + \left(\frac{1}{2} \cos \beta + 1 \right) \bullet (r_2 - r_1)$$

$$\int_{r_2}^{r_3} f(r) dr = \frac{1}{2} (\sin \alpha - \sin \beta) \ln \left| \frac{\sin r_3}{\sin r_2} \right| + \frac{1}{2} (2 - \cos \alpha + \cos \beta) \square (r_3 - r_2)$$

$$\int_{r_3}^{r_4} f(r) dr = \frac{1}{2} \sin \alpha \ln \left| \frac{\sin r_4}{\sin r_3} \right| + \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varepsilon \right) \bullet (r_4 - r_3)$$

应用 PASCAL 编写程序对 α, β 进行近似赋值运算，有

$$\text{当} \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{时,}$$

$$\sum_{i=0}^4 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr \text{ 有最大值 } 0.4487,$$

$$\text{即此时 } F(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^4 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi} \text{ 有最大值 } 0.4487.$$

(二) 当一扇窗户打开角度相对较大, 另一扇相对较小时, 如图 3-1-5, 由对称性, 不妨设 AC 窗打开角度较小, 即 $\angle CAB < \angle DQB$, 此时可以认为两扇窗户对进风量相互干扰较大。图中红线表示出了此时的临界角。

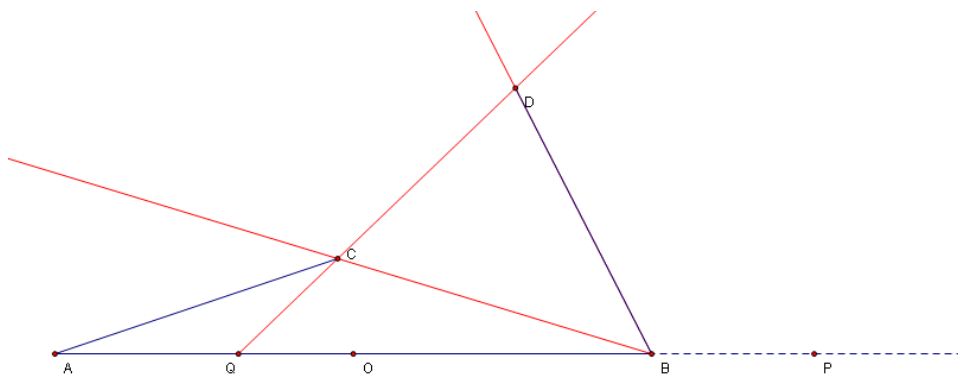


图 3-1-5

分 4 种情况讨论

1) $0 \leq r < \angle DQB$, 此时风全部被 BD 叶片遮住,

令 $\angle DQB = r_1$ 这种情况的临界角。

故

$$f(r) = 0$$

注意到 $AB = AQ + BQ$

在 $\triangle ACQ$ 和 $\triangle BDQ$ 中分别应用正弦定理, 得

$$AQ = \frac{\sin(r_1 - \alpha)}{\sin(\pi - r_1)} \bullet AC$$

$$BQ = \frac{\sin(\beta - r_1)}{\sin r_1} \bullet BD$$

于是代入数据有

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(r_1 - \alpha)}{\sin r_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - r_1)}{\sin r_1} = 1$$

解得

$$\tan r_1 = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{2 + \cos \beta - \cos \alpha}$$

由图可知， r_1 是锐角， $\sin r_1 > 0$

$$r_1 = \arctan \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{2 + \cos \beta - \cos \alpha}$$

2) 当 $\angle DQB \leq r < \beta$ 时，如图 3-1-6

令 $\beta = r_2$ 为此时的临界角。

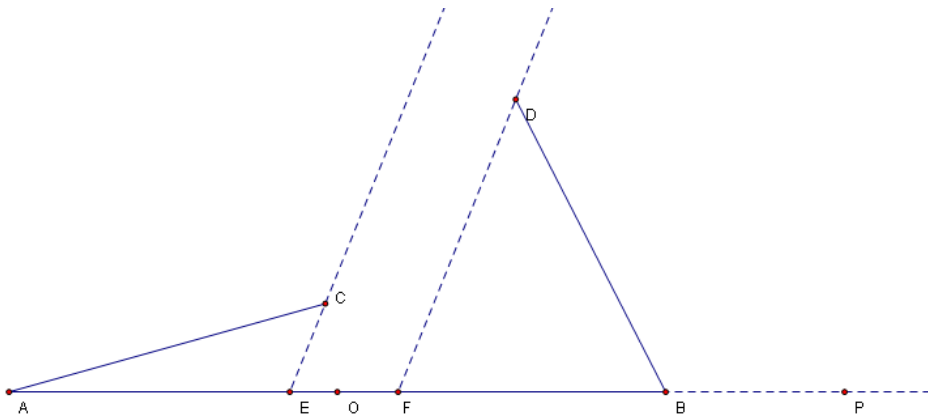


图 3-1-6

此时完全类似（一）中的第三种情况，得

$$f(r) = \frac{1}{2} [(\sin \alpha - \sin \beta) \cot r + (2 - \cos \alpha + \cos \beta)]$$

3) 当 $\beta \leq r < \angle CBP$ 时，如图 3-1-7

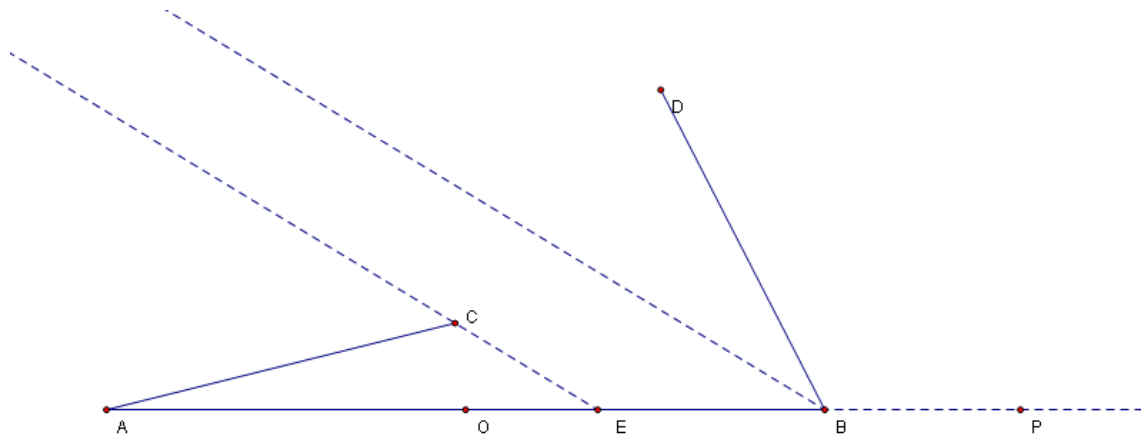


图 3-1-7

此时完全类似（一）的第 4 种情况，得

$$f(r) = \frac{1}{2} \sin \alpha \cot r - \frac{1}{2} \cos \alpha + 1$$

- 4) 当 $\angle CBP \leq r \leq \pi$ 时，此时风完全被 AC 页叶片挡住，故

$$f(r) = 0$$

令 $\angle CBP = r_3$ 为此时的临界角。

注意到此时完全类似于（一）的第 5 种情况，有

$$r_3 = \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 2} + \pi$$

综上所述，有
$$f(r) = \begin{cases} 0, r \in [0, r_1) \\ \frac{1}{2} [(\sin \alpha - \sin \beta) \cot r + (2 - \cos \alpha + \cos \beta)], r \in [r_1, r_2) \\ \frac{1}{2} \sin \alpha \cot r - \frac{1}{2} \cos \alpha + 1, [r_2, r_3) \\ 0, [r_3, \pi] \end{cases}$$

从而此时平均进风量（记为 $F(\alpha, \beta)$ ）为（令 $r_4 = \pi$ ）

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^3 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi - 0} = \frac{\sum_{i=0}^3 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi}$$

应用 PASCAL 编写程序对 α, β 进行近似赋值运算，有

$$\text{当} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{时, (对称的有当} \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \pi \end{cases} \text{时)}$$

$$\sum_{i=0}^3 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr \text{ 有最大值 } 0.3079,$$

$$\text{即此时 } F(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^3 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi} \text{ 有最大值 } 0.3079.$$

综合以上两种情况得知，在两叶窗的情况下，两扇窗户都开到最大（即均与窗台垂直）时，有最大的平均进风量，为 0.4487。

2、 三叶窗模型

三叶窗模型和两叶窗对开模型类似，只是由于中间一叶窗的存在，讨论时多了几种临界状态，讨论更为复杂。

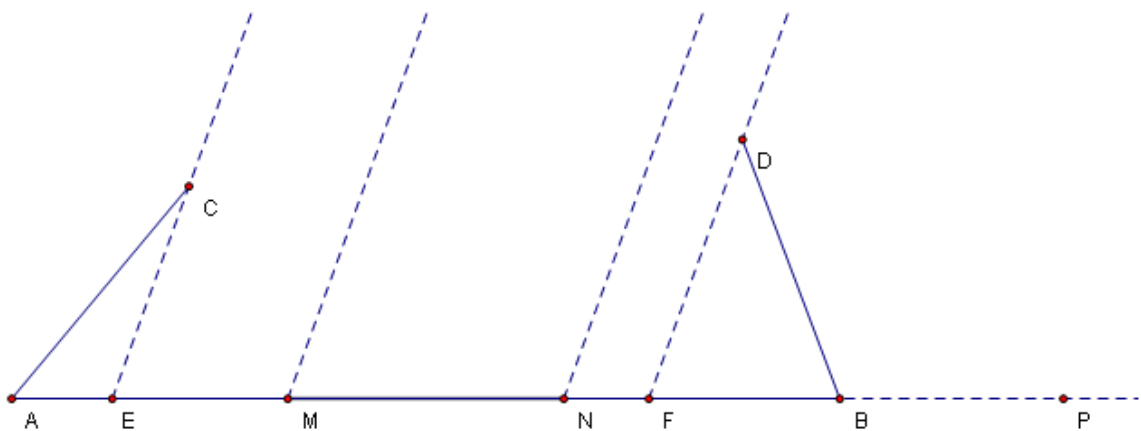


图 3-2

如图 3-2, 令 $AB=1$, 则有 $AC=AM=MN=BN=BD=\frac{1}{3}$ (解释见第五部分对于模型的优化讨论)

类似模型一,

记 $\angle CAO = \alpha, \angle DBP = \beta$,

则有 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$;

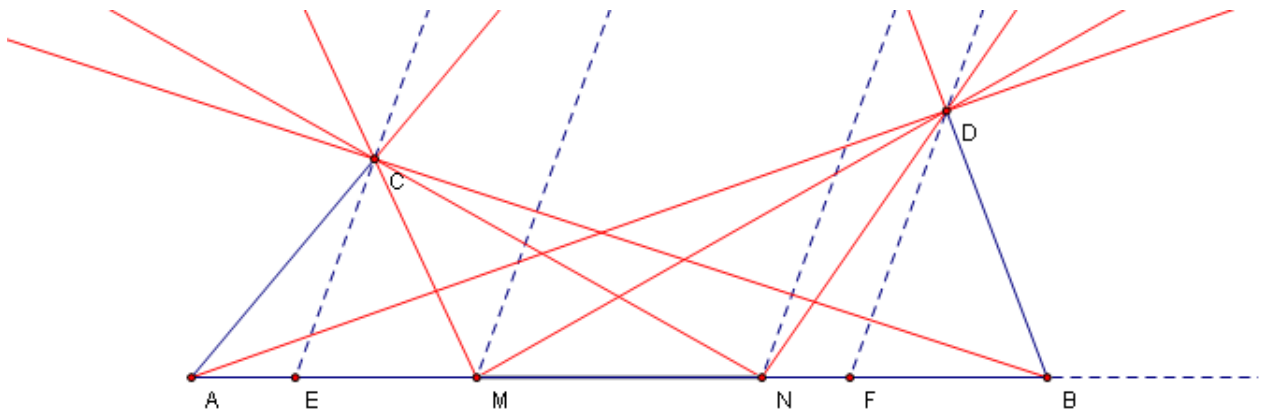


图 3-2'

如图 3-2', 红线标示出了图中的八个临界角, 它们分别是:

$$\angle DAB = \arctan \frac{\sin \beta}{3 + \cos \beta}$$

$$\angle DMB = \arctan \frac{\sin \beta}{2 + \cos \beta}$$

$$\angle DNE = \frac{\beta}{2}$$

$$\angle CAE = \alpha$$

$$\angle CME = \frac{\alpha + \pi}{2}$$

$$\angle DBE = \beta$$

$$\angle CNE = \pi + \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 2}$$

$$\angle CBE = \pi + \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 3}$$

将这八个角分别记为 $r_i (i=1,2,\dots,8)$, 且 $r_i < r_j (i,j=1,2,\dots,8, i < j)$,

即

$$r_1 = \arctan \frac{\sin \beta}{3 + \cos \beta},$$

$$r_2 = \arctan \frac{\sin \beta}{2 + \cos \beta},$$

$$r_7 = \pi + \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 2},$$

$$r_8 = \pi + \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 3},$$

$$\{r_3, r_4\} = \left\{ \frac{\beta}{2}, \alpha \right\},$$

$$\{r_5, r_6\} = \left\{ \frac{\alpha + \pi}{2}, \beta \right\};$$

将 (α, β) 的组合分类为 4 类:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq \frac{\beta}{2} \\ \beta \geq \frac{\alpha + \pi}{2} \end{array} \right., \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq \frac{\beta}{2} \\ \beta < \frac{\alpha + \pi}{2} \end{array} \right., \quad (3) \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \frac{\beta}{2} \\ \beta \geq \frac{\alpha + \pi}{2} \end{array} \right., \quad (4) \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \frac{\beta}{2} \\ \beta < \frac{\alpha + \pi}{2} \end{array} \right.$$

由对称性可知(1)和(4)等价, (2)和(3)等价,

故只需考虑(1)和(2)。

$$(1) \text{ 若 } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq \frac{\beta}{2} \\ \beta \geq \frac{\alpha + \pi}{2} \end{array} \right., \quad \text{则}$$

$$r_3 = \frac{\beta}{2}, r_4 = \alpha, r_5 = \frac{\alpha + \pi}{2}, r_6 = \beta,$$

类似模型一，分九个区间进行考虑，列表如下（ $r_0 = 0, r_9 = \pi$ ）：

区间	$[r_0, r_1)$	$[r_1, r_2)$
$f(r)$	0	$-\frac{1}{3} \sin \beta \cot r + \frac{1}{3} \cos \beta + 1$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	0	$-\frac{1}{3} \sin \beta \ln \left \frac{\sin r_2}{\sin r_1} \right + \left(\frac{1}{3} \cos \beta + 1 \right) (r_2 - r_1)$
区间	$[r_2, r_3)$	$[r_3, r_4)$
$f(r)$	x	$-\frac{1}{3} \sin \beta \cot r + \frac{1}{3} \cos \beta + \frac{2}{3}$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	$r_3 - r_2$	$-\frac{1}{3} \sin \beta \ln \left \frac{\sin r_4}{\sin r_3} \right + \left(\frac{1}{3} \cos \beta + \frac{2}{3} \right) (r_4 - r_3)$
区间	$[r_4, r_5)$	$[r_5, r_6)$
$f(r)$	$-\frac{2}{3} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cot r + \frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3} \sin \beta \cot r + \frac{1}{3} \cos \beta + \frac{1}{3}$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	$-\frac{2}{3} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \ln \left \frac{\sin r_5}{\sin r_4} \right + \frac{2}{3} (r_5 - r_4)$	$-\frac{2}{3} \sin \beta \ln \left \frac{\sin r_6}{\sin r_5} \right + \left(\frac{1}{3} \cos \beta + \frac{1}{3} \right) (r_6 - r_5)$
区间	$[r_6, r_7)$	$[r_7, r_8)$
$f(r)$	x	$\frac{1}{3} \sin \beta \cot r - \frac{1}{3} \cos \beta + 1$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	$r_7 - r_6$	$\sin \alpha \ln \left \frac{\sin r_8}{\sin r_7} \right + \left(1 - \frac{1}{3} \cos \alpha \right) (r_8 - r_7)$
区间	$[r_8, r_9]$	
$f(r)$	0	

$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	0
--------------------------------	---

从而此时

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^8 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi} ;$$

$$(2) \text{ 若 } \begin{cases} \alpha \geq \frac{\beta}{2} \\ \beta < \frac{\alpha + \pi}{2} \end{cases}, \text{ 则}$$

$$r_3 = \frac{\beta}{2}, r_4 = \alpha, r_5 = \beta, r_6 = \frac{\alpha + \pi}{2},$$

类似地 ($r_0 = 0, r_9 = \pi$) 有下表:

区间	$[r_0, r_1)$	$[r_1, r_2)$
$f(r)$	0	$-\frac{1}{3} \sin \beta \cot r + \frac{1}{3} \cos \beta + 1$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	0	$-\frac{1}{3} \sin \beta \ln \left \frac{\sin r_2}{\sin r_1} \right + \left(\frac{1}{3} \cos \beta + 1 \right) (r_2 - r_1)$
区间	$[r_2, r_3)$	$[r_3, r_4)$
$f(r)$	x	$-\frac{1}{3} \sin \beta \cot r + \frac{1}{3} \cos \beta + \frac{2}{3}$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	$r_3 - r_2$	$-\frac{1}{3} \sin \beta \ln \left \frac{\sin r_4}{\sin r_3} \right + \left(\frac{1}{3} \cos \beta + \frac{2}{3} \right) (r_4 - r_3)$

区间	$[r_4, r_5)$	$[r_5, r_6)$
$f(r)$	$-\frac{2}{3} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cot r + \frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3} \sin \alpha \cot r - \frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3}$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	$-\frac{2}{3} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \ln \left \frac{\sin r_5}{\sin r_4} \right + \frac{2}{3} (r_5 - r_4)$	$\frac{1}{3} \sin \alpha \ln \left \frac{\sin r_6}{\sin r_5} \right + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cos \alpha \right) (r_6 - r_5)$
区间	$[r_6, r_7)$	$[r_7, r_8)$
$f(r)$	x	$\frac{1}{3} \sin \beta \cot r - \frac{1}{3} \cos \beta + 1$
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	$r_7 - r_6$	$\sin \alpha \ln \left \frac{\sin r_8}{\sin r_7} \right + \left(1 - \frac{1}{3} \cos \alpha \right) (r_8 - r_7)$
区间	$[r_8, r_9]$	
$f(r)$	0	
$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr$	0	

从而此时

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^8 \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr}{\pi} ;$$

综合(1)(2)的结论, 利用 PASCAL 程序对 α, β 进行近似赋值运算, 有当时 $\alpha = 1.5708$, $\beta = 3.0348$, 取最大值 0.5956。

四、结论与应用

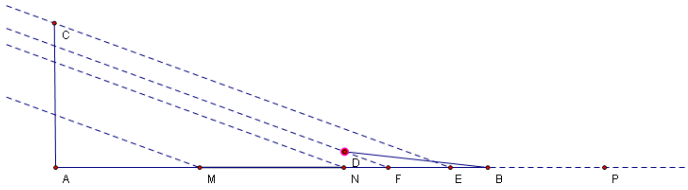


图 4-1

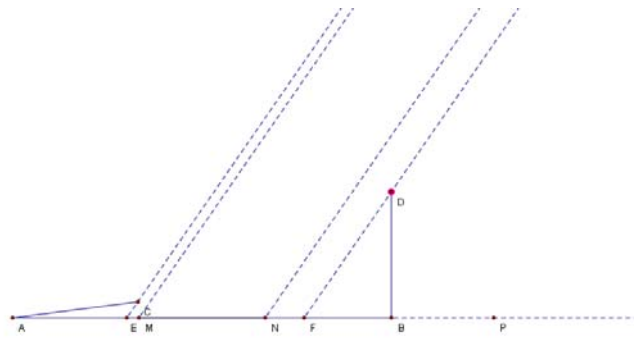


图 4-2

参考以上的讨论，我们可以看出，对于两叶窗的情况，我们应该将两扇窗户都达到最大（即叶片与窗台垂直）。对于三叶窗的情况，我们则应该按照图 4-1 或图 4-2 的方式开窗通风，其中一扇窗户与窗台垂直，另一扇窗户与窗台所成的锐角为 6.12° 。

另外，通过比较我们不难发现，设置三叶窗比设置两叶窗所能获得的最大进风量最大，于是可推断三叶窗的应用前景更好。

五、模型的进一步优化讨论

这个较为初等的模型被我们解决了。可以说，我们的几个模型假设都很贴合实际，通过忽略次要的因素达到了简化问题的目的。但我们仍然应当清醒地看到，相对于更为复杂的实际情况而言，我们的研究还有以下值得改进的地方，这些设想的提出也标志着我们下一步工作的进展方向。

1、三叶窗的尺寸

一个问题是，在讨论三叶窗模型的时候，我们假设三个一片的宽度相同。这个假设是在调查的基础上充分考虑到美观等因素所做出的。然而我们无法保证中将叶片的宽度变化是否会带来最大进风量的变化，我们同样无法断定不对称的窗户模型是否可能获得更大的进风量。这就需要我们赋予三个叶片宽度以不同的变量，

通过求偏导的方法求出极值然后相互比较。这将是我們今后的研究课题。

2、几扇不同窗户之间的影响

另外一个问题是，在这个模型中，我们考虑了一面墙上只有一扇窗的情况。而实际上，在像阳台、厨房等房间一面墙上都不止有一扇窗户，虽然绝大部分情况我们也仅仅使用一扇窗户通风，但是对于探究最大的通风量这个问题依然有很大的价值。两扇不同窗户的叶片之间会产生对风的相互阻挡和影响，这使得问题进一步复杂，主要表现在临街情况的进一步增多、分类讨论过程的进一步加长。事实上，如果将不同的窗户看成一个整体，我们可以将这个问题推广为讨论一扇窗户有 n 个叶片时的情形。 $n=2、3$ 的情况在本文中有所讨论，所以下一步我们可以考虑应用数学归纳法等工具完成对 n 的推广，使问题完全得到解决。

3、气流在竖直平面上的运动

我们还没有考虑气流在竖直平面上运动是对采风所造成的影响。这需要我们首先对于近建筑物周围的风向变化规律有充分的了解，同时需要借助空气动力学的知识做出模型的假设解决问题。我们一定会努力完成这个设想计划。

六、收获与感悟

从报名参加丘成桐杯的那一刻起，我们三个人的第一次合作也就正式开始了。从收集资料确定题目，到模型建立、数学演算，再到论文的撰写与修订，每一步虽然都显得那样的艰难，但是有了同伴的协助与鼓励，再大的困难也无法阻止我们前进的脚步。在论文撰写的过程当中，我们对细节决定成败这一点感触颇深。就在即将收工的时候，我们突然发现在考虑两叶窗对开式模型时忽略了两种临界状况，这导致我们不得不返工，又多花了两三个小时，可见细节的重要性。当我们

利用集体的智慧完成任务时，我们都非常的兴奋。通过这次探索，我们逐渐形成了严谨求实、刻苦钻研的科学精神，并且培养了各自的综合能力，更重要的是我们明白了一个不变的真理：数学诞生于生活中，默契诞生于合作中，成功诞生于共同努力中。

七、感谢

首先感谢李老师、班主任汤老师对我们的合作项目给予的具体指导和帮助，其次感谢父母的支持和理解，在此向他们表示最诚挚的谢意！

我们在撰写论文的过程中希冀做到最好，但由于知识和能力的限制，不可避免出现漏洞和不足，敬请各位老师批评指正，谢谢！

八、附录：Pascal 程序代码

1) 模型一

情况（一）

```
program ss;
```

```
const
```

```
    pi=3.141592653589793238462643383279;
```

```
var
```

```
    r1,r2,r3,r4,r5,a,b,re,max,max1,max2,aa,bb,c:double;
```

```
    i,j:longint;
```

```
begin
```

```
    assign(output,'qct.out');
```

```
    rewrite(output);
```

```

aa:=0;

bb:=pi/2;

c:=pi/2/100;

for i:=0 to 100 do

for j:=0 to 100 do begin

    a:=aa+i*c;

    b:=bb+j*c;

    r1:=arctan ( sin(b) / (2+cos(b)) );

    r4:=arctan ( sin(a) / (cos(a)-2) )+pi;

    r2:=a;

    r3:=b;

    if (a>=r1)and(b<=r2) then begin

        re:=

-1/2*sin(b)*ln(abs(sin(r2)/sin(r1)))+(1/2*cos(b)+1)*(r2-r1)+

1/2*(sin(a)-sin(b))*(ln(abs(sin(r3)))-ln(abs(sin(r2))))+1/2*(2-cos(a)+cos(b))*(r3

-r2)+

1/2*sin(a)*ln(abs(sin(r4)/sin(r3)))+(1-1/2*cos(a))*(r4-r3);

        writeln(a/pi*180:4:4,' ',b/pi*180:4:4,' ',re:4:4);

    end;

    if re>max then begin

        max:=re;

```

```
                max1:=a;

                max2:=b;

            end;

        end;

        writeln;

        writeln;

        writeln(max1:4:4,' ',max2:4:4,' ',max:4:4);

        writeln(max1/pi*180:4:4,' ',max2/pi*180:4:4,' ',max:4:4);

        close(output);

    end.
```

情况（二）

```
program ss;

const

    pi=3.141592653589793238462643383279;

var

    r1,r2,r3,r4,r5,a,b,re,max,max1,max2,aa,bb,c:double;

    i,j:longint;

begin

    assign(output,'qct3.out');

    rewrite(output);

    aa:=0;
```

```

bb:=pi/2;

c:=pi/2/100;

for i:=0 to 100 do

for j:=0 to 100 do if (i<>0)and(j<>100) then begin

    a:=aa+i*c;

    b:=bb+j*c;

    r1:=arctan ( (sin(b) - sin(a)) / (2+cos(b)-cos(a)) );

    r2:=b;

    r3:=arctan(sin(a)/(cos(a)-2))+pi;

    if a<arctan(sin(b)/(2+cos(b))) then begin

        re:=

1/2*(sin(a)-sin(b))*(ln(abs(sin(r2)))-ln(abs(sin(r1))))+1/2*(2-cos(a)+cos(b))*(r2

-r1)+

1/2*sin(a)*ln(abs(sin(r3)/sin(r2)))+(1-1/2*cos(a))*(r3-r2);

        writeln(a/pi*180:4:4,' ',b/pi*180:4:4,' ',re:4:4);

    end;

    if re>max then begin

        max:=re;

        max1:=a;

        max2:=b;

```

```
        end;

    end;

    writeln;

    writeln;

    writeln(max1:4:4,' ',max2:4:4,' ',max:4:4);

    writeln(max1/pi*180:4:4,' ',max2/pi*180:4:4,' ',max:4:4);

    close(output);

end.
```

2) 模型二

```
program ss;

const

    pi=3.141592653589793238462643383279;

var

    a,b,re,max,max1,max2,aa,bb,c:double;

    i,j:longint;

    r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8:double;

    re12,re23,re34,re45,re56,re67,re78:double;

begin

    assign(output,'qct2.out');

    rewrite(output);

    aa:=0;
```

bb:=pi/2;

c:=pi/2/500;

for j:=0 to 500 do

for i:=0 to 500 do begin

a:=aa+i*c;

b:=bb+j*c;

if a>=b/2 then begin

r1:=arctan (sin(b) / (3+cos(b)));

r2:=arctan (sin(b) / (2+cos(b)));

r7:=pi+arctan (sin(a) / (cos(a)-2));

r8:=pi+arctan (sin(a) / (cos(a)-3));

if b>=(a+pi)/2 then begin

r3:=b/2;

r4:=a;

r5:=(a+pi)/2;

r6:=b;

re12:=-1/3*sin(b)*ln(abs(sin(r2)/sin(r1)))+(1/3*cos(b)+1)*(r2-r1);

re23:=r3-r2;

re34:=-1/3*sin(b)*ln(abs(sin(r4)/sin(r3)))+(1/3*cos(b)+2/3)*(r4-r3);

re45:=-2/3*(b-a)/2*ln(abs(sin(r5)/sin(r4)))+2/3*(r5-r4);

```
re56:=-1/3*sin(b)*ln(abs(sin(r6)/sin(r5)))+(1/3*cos(b)+1/3)*(r6-r5);
```

```
re67:=r7-r6;
```

```
re78:=1/3*sin(a)*ln(abs(sin(r8)/sin(r7)))+(1-1/3*cos(a))*(r8-r7);
```

```
re:=re12+re23+re34+re45+re56+re67+re78;
```

```
writeln(a/pi*180:8:4,b/pi*180:8:4,re:8:4);
```

```
if re>max then begin
```

```
max1:=a;
```

```
max2:=b;
```

```
max:=re;
```

```
end;
```

```
end else begin
```

```
r3:=b/2;
```

```
r4:=a;
```

```
r6:=(a+pi)/2;
```

```
r5:=b;
```

re12:=-1/3*sin(b)*ln(abs(sin(r2)/sin(r1)))+(1/3*cos(b)+1)*(r2-r1);

re23:=r3-r2;

re34:=-1/3*sin(b)*ln(abs(sin(r4)/sin(r3)))+(1/3*cos(b)+2/3)*(r4-r3);

re45:=-2/3*(b-a)/2*ln(abs(sin(r5)/sin(r4)))+2/3*(r5-r4);

re56:=1/3*sin(a)*ln(abs(sin(r6)/sin(r5)))+(2/3-1/3*cos(a))*(r6-r5);

re67:=r7-r6;

re78:=1/3*sin(a)*ln(abs(sin(r8)/sin(r7)))+(1-1/3*cos(a))*(r8-r7);

re:=re12+re23+re34+re45+re56+re67+re78;

writeln(a/pi*180:8:4,b/pi*180:8:4,re:8:4);

if re>max then begin

max1:=a;

max2:=b;

max:=re;

end;

end;

end;

end;

```
writeln;
```

```
writeln;
```

```
writeln(max1:10:4,' ',max2:10:4,' ',max:10:4);
```

```
writeln(max1/pi*180:4:4,' ',max2/pi*180:4:4,' ',max:4:4);
```

```
close(output);
```

```
end.
```