刘维尔数论猜想的完全证明及变式研究

队员　李凯旋
教师　李春雷
邮编　102488
学校　北京师范大学良乡附属中学
电话　010-81380529　13552999981
电子邮箱　gjl680616292@163.com

摘要：我的项目是以北京师范大学孙瑞清教授编写的《趣题妙解》中的一段材料为背景，对其中的法国数学家刘维尔的“令人惊奇的步骤”得到的发现提出了质疑，并提炼成一个猜想：**任何一个大于 1 的自然数，它的每一个因数的因数的个数的立方和，恰好等于它的每一个因数的因数的个数的和的平方.** 该项目将其称之为**刘维尔数论猜想.**项目的目标是证明这个猜想的正确性以及对猜想进行变式研究. 研究的策略是从特殊到一般，先简单后复杂，逐渐归纳出最一般情况的结论. 笔者曾经在小学五年级用高中的二项式定理、累加法，分别证明了对于可写成 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$（其中 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 是质数且两两不等）、a^n $(a为质数, n \in N^*)$ 的自然数，刘维尔数论猜想都是正确的，并将这一研究成果形成论文《刘维尔猜想的证明》，公开发表在《中学数学研究》2006 年第 8 期(总第 243 期)的第 48-50 页上. 但因为当时水平有限，证出来的结论只是刘维尔数论猜想的两种特殊情况，还未能够将刘维尔数论猜想彻底证明. 在之后的时间里，我继续研究了能够写成 $a_1^n \times a_2$、$a_1^n \times a_2^m$ $(a_1$、a_2是质数且不等，$n, m \in N^*)$的自然数，刘维尔数论猜想都是正确的. 对于特殊的自然数 $a_1^{\alpha_1}$、$a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2}$、$a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times a_3^{\alpha_3}$，我比较了它们各自的刘维尔数论结论的结构特征，从而大胆预言了对于任一可写成 $a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times a_3^{\alpha_3} \times \cdots \times a_n^{\alpha_n}$（$a_1$、$a_2$、$a_3$、$\cdots$、$a_n$ 都是质数并且两两不等，α_1、α_2、α_3、$\cdots$、$\alpha_n \in N^*$)的自然数，刘维尔数论猜想也都应有类似的结构特征，这为刘维尔数论猜想的完全证明铺平了道路. 对于可写成 a^n $(a为质数, n \in N^*)$ 的特殊自然数，我给出了刘维尔数论猜想所得等式的一个漂亮的几何解释；对于任意一个自然数，我还发现了它的因数的因数的立方和以及和的平方的表达式，都隐藏着易于记忆的完美的结构特征，这可以使得我们迅速得到等式，还可立即算出立方和以及和的平方的数值. 最后又对刘维尔数论猜想进行了变式研究，分别探讨了任何一个大于 1 的自然数，它的每一个因数的因数的个数的平方和以及积的结果. 研究过程中存在很多荆棘和挑战，我也为长达三年时间的苦思冥想，最终将猜想彻底证明而欢欣鼓舞. 做项目给了我一个广阔的创造空间.

Abstract: Based on a material of the book named *Interesting problems, Wonderful solution* written by Sun Ruiqing, a professor from Beijing Normal University, I raised the question to a discovery coming from an amazing approach of French mathematician Liouville and developed into a conjecture: to any natural number that is over 1, the sum of cubes of the factor number of factors of its factors is equal to the square of the sum of the factor number of factors of its factors, which is called Liouville Mathematical Conjecture. The aim of this research is to prove the conjecture's validity and to do a research on its various forms. The tactic that I use is to research from the special to the general, from the simple to the complex and to draw a conclusion on the most general case. When I was a primary student of Grade 5, I applied binomial theorem and the method of continuous plus studied in senior school respectively to prove that Liouville Mathematical Conjecture is correct for the natural number written $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ (a_1、a_2、$\cdots$、a_n is a prime number and any prime number is not equal to the other), and the natural number written a^n (a is a prime number, $n \in N^*$). Then I wrote an essay concerning this proof, whose title is *Proof of Liouville Mathematical Conjecture* published on page 48 - 50 of No. 8 issue (year 2006) of *Studies in the Middle School Math* (No.243 issue of all). But due to the limit of my ability at that time, what I could prove was only on two special cases, and I was unable to give a general proof of Liouville Mathematical Conjecture. In the following years, I went on doing the research and proved that Liouville Mathematical Conjecture is also correct for the natural number which can be written $a_1^n \times a_2$、$a_1^n \times a_2^m$ (both a_1、a_2 are prime numbers but they are not equal $n, m \in N^*$) . To the special natural numbers $a_1^{\alpha_1}$、$a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2}$、$a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times a_3^{\alpha_3}$, I compared each of its structural characteristics belonging to Liouville Mathematical Conjecture, and then audaciously predicted that to any natural number that can be written $a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times a_3^{\alpha_3} \times \cdots \times a_n^{\alpha_n}$ (all of a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n is a prime number , but any of them is not equal to the other, α_1、α_2、α_3、$\cdots$、$\alpha_n \in N^*$), Liouville Mathematical Conjecture also has a similar structural character, which paved the way for the general proof of Liouville Mathematical Conjecture. to the special natural number written a^n (a is a prime number, $n \in N^*$), I gave a wonderful explanation of geometry ;to any natural number, I also found an expression of the sum of the cubes and the square of the sum of the factors of factors, which hides a perfect structural character that can be easily remembered, and which may make us get an equation quickly and even work out the numerical value of the sum of cubes and the square of sums immediately. Finally I did a research on its various forms and explored all the results of a square sum and a product of the factor number of factors of its factors for any natural number that is over 1. Though a lot of difficulties and challenges existed in the process of proving, I felt inspired when I eventually made the conjecture proved, having a bee in my head and spending about three years. Doing this research gives me wide space of creativity.

一、背景材料

由现任北京师范大学教授,中国教育学会中学数学专业委员会副理事长孙瑞清主编、北京大学出版社出版的《小学数学竞赛辅导（六年级适用）》第十五讲《趣题妙解》的 P197 二、算术奇题有以下内容,现原文摘录如下：

“算术中有许多趣题奇事,下面举出两则,以供思考.

例4 对于自然数 n, 有

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2. \quad ①$$

这是早已被证明了的事实.法国数学家刘维尔对此作了惊人的推广,得到了关于自然数集的一个完全类似性质.那么刘维尔的发现是什么呢?

解 刘维尔发现了一个令人惊奇的步骤:

(1) 选定一个自然数 n,比如 $n=6$;

(2) 确定 $n=6$ 的因数,显然 6 的因数有:1,2,3,6;

(3) 进一步确定上述因数的因数的个数:

1 的因数有 1 个,

2 的因数有 2 个,

3 的因数有 2 个,

6 的因数有 4 个;

(4) 于是,得到类似①式的等式:

$$1^3+2^3+2^3+4^3=1+8+8+64=81=9^2,$$

即 $$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2. \quad ②$$

这就是刘维尔的发现.

我们再举例,设 $n=12$, 则因数为:1,2,3,4,6,12.这些因数的因数的个数分别为:1,2,2,3,4,6,于是

$$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=1+8+8+27+64+216=324=18^2=(1+2+2+3+4+6)^2.”$$

二、问题提出

笔者在小学五年级自学上述材料时，曾对刘维尔的“惊人的推广”、“令人惊奇的步骤”产生了浓厚的兴趣，也被等式 $1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2$ 、$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6)^2$ 、…结构上的简洁美、和谐美、奇异美所折服，也曾尝试给出 n 的一些值，按照刘维尔的“令人惊奇的步骤”，得到的等式都是成立的.我们不得不佩服一代数学大师的睿智以及在等式方面的精彩构造，信手拈来，就能得到一些等式.

在慨叹刘维尔是魔“数”大师之余，也产生了一些淡淡的担忧：

只凭几个特殊的例子，就能说明按刘维尔的“令人惊奇的步骤”得到的等式都成立？

数学具有严谨性，不能以偏概全. 在数学探究中，要有不唯师、不唯书、不唯上，敢于质疑的精神.

为此，我们需要解决这样一个问题：

若按刘维尔的“令人惊奇的步骤”，得到的等式都成立，那就要找到等式成立的原因，给出严格的证明；

若按刘维尔的“令人惊奇的步骤”，得到的等式不都成立，那就要给出反例，向数学家提出挑战.

我们可以把刘维尔的“令人惊奇的步骤”，得到的等式都成立，抽象成以下一个数学命题，因为不知道这个命题的真假，故我们可以称之为刘维尔数论猜想，表述如下：

刘维尔数论猜想：任何一个大于 1 的自然数，它的每一个因数（包括 1 和它本身）的因数的个数的立方和，恰好等于它的每一个因数的因数的个数的和的平方.

下面要研究的就是这个刘维尔数论猜想的正确性以及它的变式.

三、制定方案

思路：从特殊到一般，先简单后复杂，逐渐归纳出最一般情况的结论，最后进行变式研究.

方法：任何一个大于 1 的自然数都可以分解成 $a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ (a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等, α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式，只要证明出刘维尔猜想对这个自然数是成立的，则问题得证.但 $a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ 的形式非常复杂，很难找到解决问题的切入点，为此我们从以下的特殊情况入手分析证明猜想的正确性：

1. 研究特殊情况:对于能够写成 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ (其中 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 都是质数且两两不等)的自然数,即这个自然数是多个两两不等的质数的 1 次幂做乘积,探讨刘维尔数论猜想的正确性;

2. 研究特殊情况: 对于能够写成 $a^n\,(a为质数, n \in N^*)$ 的自然数,即这个自然数是 1 个质数的 n 次幂,探讨刘维尔数论猜想的正确性;

3. 研究较一般情况: 对于能够写成 $a_1^n \times a_2\,(a_1、a_2都是质数且不等, n \in N^*)$ 的自然数,即这个自然数是 1 个质数的 n 次幂与另外 1 个质数的 1 次幂做乘积,探讨刘维尔数论猜想的正确性;

4. 研究更一般情况:对于能够写成 $a_1^n \times a_2^m\,(a_1、a_2都是质数且不等, n, m \in N^*)$ 的自然数,即这个自然数是 1 个质数的 n 次幂与另外 1 个质数的 m 次幂做乘积,探讨刘维尔数论猜想的正确性;

5. 研究最一般情况: 对于能够写成 ${a_1}^{\alpha_1} \times {a_2}^{\alpha_2} \times {a_3}^{\alpha_3} \times \cdots \times {a_n}^{\alpha_n}$ (a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 都是质数并且两两不等, α_1、α_2、α_3、$\cdots$、$\alpha_n \in N^*$)的自然数,即这个自然数是多个质数的正整数次幂做乘积,探讨刘维尔数论猜想的正确性.4 的结果实际上给出了能够写成 2 个质数的正整数次幂做乘积的自然数的研究方法,这给我们研究能够写成 n 个质数的正整数次幂做乘积的自然数,起到了导航的作用,可以帮助我们大胆猜想出一些重要结论,解决命题证明中的一些关键环节,从而使问题彻底解决.

最后，对刘维尔数论猜想进行变式研究，分别探究了大于 1 的自然数的所有因数的因数个数的平方和以及积的相关结论.

四、证明猜想

1、对于能够写成 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$（其中 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 都是质数且两两不等）的自然数 A,探究刘维尔数论猜想的正确性

第一类:当 $n = 1$ 时, $A = a_1$(a_1 为质数).

首先确定 $A = a_1$ 的因数, 显然 a_1 的因数有:1, a_1.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1 的因数为 1, a_1 ,有 2 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2)^2 = 3^2 = 9$,

于是,得到类似①式的等式:

$1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = 9^1$.

因此，对于能够写成 a_1(a_1 为质数)的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第二类:当 $n = 2$ 时, $A = a_1 \times a_2$ (a_1、a_2 都是质数且不等).

首先确定 $A = a_1 \times a_2$ 的因数, 显然 $A = a_1 \times a_2$ 的因数有:1, $a_1, a_2, a_1 \times a_2$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1 的因数为 1, a_1 ,有 2 个,

a_2 的因数为 1, a_2 ,有 2 个,

$a_1 \times a_2$ 的因数为 1, $a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = 1 + 8 + 8 + 64 = 81$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2+2+4)^2 = 9^2 = 81$,

于是,得到类似①式的等式:

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1+2+2+4)^2 = 9^2$.

因此，对于能够写成$a_1 \times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等)的自然数A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第三类:当$n=3$时, $A=a_1 \times a_2 \times a_3$($a_1$、$a_2$、$a_3$都是质数且两两不等).

首先确定$A=a_1 \times a_2 \times a_3$的因数，显然$A=a_1 \times a_2 \times a_3$的因数有:$1, a_1, a_2, a_3, a_1 \times a_2, a_1 \times a_3, a_2 \times a_3$, $a_1 \times a_2 \times a_3$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1的因数为$1, a_1$,有 2 个,

a_2的因数为$1, a_2$,有 2 个,

a_3的因数为$1, a_3$,有 2 个,

$a_1 \times a_2$的因数为$1, a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个,

$a_1 \times a_3$的因数为$1, a_1, a_3, a_1 \times a_3$,有 4 个,

$a_2 \times a_3$的因数为$1, a_2, a_3, a_2 \times a_3$,有 4 个,

$a_1 \times a_2 \times a_3$的因数为$1, a_1, a_2, a_3, a_1 \times a_2, a_1 \times a_3, a_2 \times a_3, a_1 \times a_2 \times a_3$,有 8 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3+2^3+2^3+2^3+4^3+4^3+4^3+8^3=1+8+8+8+64+64+64+512=729$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2+2+2+4+4+4+8)^2=27^2=729$,

于是,得到类似①式的等式:

$1^3+2^3+2^3+2^3+4^3+4^3+4^3+8^3=(1+2+2+2+4+4+4+8)^2=9^3$.

因此，对于能够写成$a_1 \times a_2 \times a_3$ (a_1、a_2、a_3都是质数且两两不等)的自然数A, 刘维尔数论猜想是正确的.

……

第n类:自然数为$A=a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$($a_1$、$a_2$、$a_3$、…、$a_n$都是质数且两两不等).

首先确定自然数$A=a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$的因数，显然$A=a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$的因数有:1, a_1, a_2, $a_3, \cdots, a_n, a_1 \times a_2, a_1 \times a_3, \cdots, a_1 \times a_n, a_2 \times a_3, \cdots, a_2 \times a_n, \cdots, a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$,

所以自然数$A=a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$的因数的个数共有：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数有C_n^0=1 个,

形如a_i（$i=1,2,\cdots,n$）的因数共有C_n^1个,每个因数的因数各有 2 个,

形如$a_i \times a_j$（$i,j=1,2,\cdots,n$）的因数共有C_n^2个,每个因数的因数各有 4 个,

形如$a_i \times a_j \times a_k$（$i,j,k=1,2,\cdots,n$）的因数共有$C_n^3$个,每个因数的因数各有 8 个,

……,

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$的因数的因数有$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$$1^3+\underbrace{2^3+2^3+\cdots+2^3}_{C_n^1\text{个}2^3\text{的和}}+\underbrace{4^3+4^3+\cdots+4^3}_{C_n^2\text{个}4^3\text{的和}}+\underbrace{8^3+8^3+\cdots+8^3}_{C_n^3\text{个}8^3\text{的和}}+\cdots+\underbrace{(2^n)^3}_{C_n^n\text{个}(2^n)^3\text{的和}},$$

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$$(1+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{C_n^1\text{个}2\text{的和}}+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{C_n^2\text{个}4\text{的和}}+\underbrace{8+8+\cdots+8}_{C_n^3\text{个}8\text{的和}}+\cdots+\underbrace{2^n}_{C_n^n\text{个}2^n\text{的和}})^2.$$

在第一类中,对于$A=a_1$,证得相应结论$1^3+2^3=(1+2)^2=9^1$;

在第二类中,对于$A=a_1 \times a_2$,证得相应结论$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2=9^2$;

在第三类中,对于$A=a_1 \times a_2 \times a_3$,证得相应结论$1^3+2^3+2^3+2^3+4^3+4^3+4^3+8^3$

$=(1+2+2+2+4+4+4+8)^2=9^3$.

于是,可以猜测,在第 n 类中,对于 $A=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$,可以得到类似①式的等式:

$$1^3+\underbrace{2^3+2^3+\cdots+2^3}_{C_n^1个2^3的和}+\underbrace{4^3+4^3+\cdots+4^3}_{C_n^2个4^3的和}+\underbrace{8^3+8^3+\cdots+8^3}_{C_n^3个8^3的和}+\cdots+\underbrace{(2^n)^3}_{C_n^n个(2^n)^3的和}$$

$$=(1+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{C_n^1个2的和}+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{C_n^2个4的和}+\underbrace{8+8+\cdots+8}_{C_n^3个8的和}+\cdots+\underbrace{2^n}_{C_n^n个2^n的和})^2=9^n. \qquad (*)$$

现用高中二项式定理的知识对(*)式加以证明.

证明:

$$1^3+\underbrace{2^3+2^3+\cdots+2^3}_{C_n^1个2^3的和}+\underbrace{4^3+4^3+\cdots+4^3}_{C_n^2个4^3的和}+\underbrace{8^3+8^3+\cdots+8^3}_{C_n^3个8^3的和}+\cdots+\underbrace{(2^n)^3}_{C_n^n个(2^n)^3的和}$$

$$=1^3+C_n^1 2^3+C_n^2 4^3+C_n^3 8^3+\cdots+C_n^n(2^n)^3=C_n^0(2^3)^0+C_n^1(2^3)^1+C_n^2(2^3)^2+C_n^3(2^3)^3+\cdots+C_n^n(2^3)^n$$

$$=(1+2^3)^n=9^n,$$

而 $(1+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{C_n^1个2的和}+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{C_n^2个4的和}+\underbrace{8+8+\cdots+8}_{C_n^3个8的和}+\cdots+\underbrace{2^n}_{C_n^n个2^n的和})^2$

$$=(1+C_n^1 2+C_n^2 4+C_n^3 8+\cdots+C_n^n 2^n)^2=(C_n^0 2^0+C_n^1 2^1+C_n^2 2^2+C_n^3 2^3+\cdots+C_n^n 2^n)^2$$

$$=[(1+2)^n]^2=9^n,$$

则 $1^3+\underbrace{2^3+2^3+\cdots+2^3}_{C_n^1个2^3的和}+\underbrace{4^3+4^3+\cdots+4^3}_{C_n^2个4^3的和}+\underbrace{8^3+8^3+\cdots+8^3}_{C_n^3个8^3的和}+\cdots+\underbrace{(2^n)^3}_{C_n^n个(2^n)^3的和}$

$$=(1+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{C_n^1个2的和}+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{C_n^2个4的和}+\underbrace{8+8+\cdots+8}_{C_n^3个8的和}+\cdots+\underbrace{2^n}_{C_n^n个2^n的和})^2=9^n.$$

从而(*)式得证.

这也就证明了任何形如 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$($a_1$、$a_2$、$a_3$、…、$a_n$ 都是质数且两两不等)的自然数 A,按刘维尔发现的令人惊奇的步骤得到的等式都是成立的.

我们得到:

定理 1　若一个自然数 A 能够写成 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$(其中 a_1、a_2、…、a_n 都是质数且两两不等),则 A 的每一个因数的因数的个数的立方和等于 A 的每一个因数的因数的个数的和的平方,且等于 9^n.

即 $\boldsymbol{1^3+\underbrace{2^3+2^3+\cdots+2^3}_{C_n^1个2^3的和}+\underbrace{4^3+4^3+\cdots+4^3}_{C_n^2个4^3的和}+\underbrace{8^3+8^3+\cdots+8^3}_{C_n^3个8^3的和}+\cdots+\underbrace{(2^n)^3}_{C_n^n个(2^n)^3的和}}$

$$\boldsymbol{=(1+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{C_n^1个2的和}+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{C_n^2个4的和}+\underbrace{8+8+\cdots+8}_{C_n^3个8的和}+\cdots+\underbrace{2^n}_{C_n^n个2^n的和})^2=9^n}.$$

2、对于能够写成 a^n(a为质数,$n\in N^*$)的自然数 A,探究刘维尔数论猜想的正确性

第一类:当 $n=1$ 时,$A=a$ (a为质数).

首先确定 $A=a$ 的因数,显然 a 的因数有:1,a.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a 的因数为 1,a,有 2 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3+2^3=1+8=9$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2)^2=3^2=9$,

于是,得到类似①式的等式:

$1^3+2^3=(1+2)^2$.

因此，对于能够写成 a (a为质数) 的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第二类:当 $n=2$ 时, $A=a^2$ (a为质数).

首先确定 $A=a^2$ 的因数，显然 a^2 的因数有:1, a, a^2.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a 的因数为 $1,a$, 有 2 个,

a^2 的因数为 $1,a,a^2$,有 3 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3+2^3+3^3=1+8+27=36$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2+3)^2=6^2=36$,

于是,得到类似①式的等式:

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$.

因此，对于能够写成 a^2 (a为质数) 的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第三类:当 $n=3$ 时, $A=a^3$ (a为质数).

首先确定 $A=a^3$ 的因数，显然 a^3 的因数有:1, a, a^2, a^3.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a 的因数为 $1,a$, 有 2 个,

a^2 的因数为 $1,a,a^2$, 有 3 个,

a^3 的因数为 $1,a,a^2,a^3$, 有 4 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3+2^3+3^3+4^3=1+8+27+64=100=10^2$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2+3+4)^2=10^2=100$,

于是,得到类似①式的等式:

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$.

因此，对于能够写成 a^3 (a为质数) 的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

……

第 n 类:自然数为 $A=a^n$ (a为质数).

首先确定 $A=a^n$ 的因数，显然 a^n 的因数有:1, a, a^2, $a^3,\cdots,a^n$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a 的因数为 $1,a$, 有 2 个,

a^2 的因数为 $1,a,a^2$, 有 3 个,

a^3 的因数为 $1,a,a^2,a^3$, 有 4 个,

……

a^n 的因数为 $1,a,a^2,a^3,\cdots,a^n$,有 $n+1$ 个.

则将每一个因数的因数个数的立方求和,得

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3$,

又将每一个因数的因数个数求和后平方,得

$[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2$.

在第一类中,对于 $A=a$,证得相应结论 $1^3+2^3=(1+2)^2$;

在第二类中,对于 $A=a^2$,证得相应结论 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$;

在第三类中,对于 $A=a^3$,证得相应结论 $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$.

于是,可以猜测,在第 n 类中,对于 $A=a^n$,可以得到类似于①式的等式:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2. \qquad (**)$$

现对(**)式加以证明.

证法 1(累加法):

因为 $(m+1)^4-m^4=4m^3+6m^2+4m+1$,

分别取 $m=1,2,3,\cdots,n,n+1$ 得

$2^4-1^4=4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1,$

$3^4-2^4=4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1,$

$4^4-3^4=4\cdot 3^3+6\cdot 3^2+4\cdot 3+1,$

……

$(n+1)^4-n^4=4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1,$

$(n+2)^4-(n+1)^4=4\cdot(n+1)^3+6\cdot(n+1)^2+4\cdot(n+1)+1.$

把以上 $n+1$ 个式子的左右两边分别相加,得

$$\begin{aligned}&(n+2)^4-1^4\\&=4\cdot[1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3]+6\cdot[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n+1)^2]+4\cdot[1+2+3+\cdots+(n+1)]+n+1\\&=4\cdot[1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3]+6\cdot\frac{1}{6}(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]+4\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}+n+1\\&=4\cdot[1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3]+(n+1)(n+2)(2n+3)+2(n+1)(n+2)+n+1\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3\\&=\frac{1}{4}[(n+2)^4-1-(n+1)(n+2)(2n+3)-2(n+1)(n+2)-n-1]\\&=\frac{1}{4}[(n+2)^4-(n+1)(n+2)(2n+3)-2(n+1)(n+2)-(n+2)]\\&=\frac{1}{4}(n+2)[(n+2)^3-(n+1)(2n+3)-2(n+1)-1]\\&=\frac{1}{4}(n+2)[(n+2)^3-(n+1)(2n+3)-(2n+3)]\\&=\frac{1}{4}(n+2)[(n+2)^3-(n+2)(2n+3)]\\&=\frac{1}{4}(n+2)^2[(n+2)^2-(2n+3)]=\frac{1}{4}(n+2)^2(n+1)^2\end{aligned}$$

而 1+2+3+$\cdots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$,

则 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2$.

从而(**)式得证.

证法 2(拆项法):

因为 $i^3=i^3-i+i=(i-1)i(i+1)+i,i=1,2,\cdots,n,n+1$,

所以 $1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3=\sum_{i=1}^{n+1}[(i-1)i(i+1)+i]=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1}[(i-1)i(i+1)(i+2)-(i-2)(i-1)i(i+1)]+\sum_{i=1}^{n+1}i$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$.

又因为$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$,

所以$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2$.

从而(**)式得证.

证法 3(数学归纳法):

(1)当$n=1$时,左边$=1^3+2^3=9$,右边$=(1+2)^2=9$,所以等式成立.

(2)假设当$n=k$时,等式成立,即$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(k+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(k+1)]^2$.

则$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(k+1)^3+(k+2)^3=[1+2+3+4+\cdots+(k+1)]^2+(k+2)^3$

$=[\frac{(k+1)(k+2)}{2}]^2+(k+2)^3=(k+2)^2[\frac{(k+1)^2}{4}+(k+2)]=(k+2)^2\cdot\frac{k^2+6k+9}{4}=[\frac{(k+2)(k+3)}{2}]^2$

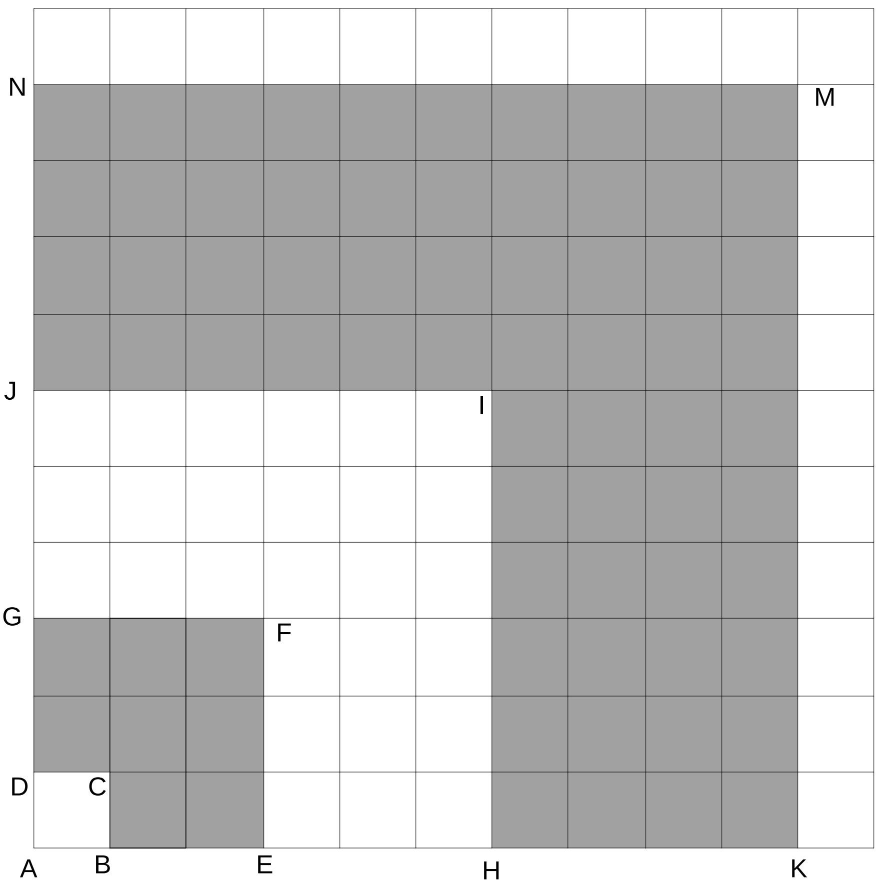
$=[1+2+3+\cdots+(k+1)+(k+2)]^2$.

所以当$n=k+1$时,等式也成立.

由(1)(2)可知,对于一切$n\in N^*$,都有等式成立.

从而(**)式得证.

这也就证明了任何形如a^n (a为质数,$n\in N^*$) 的自然数A,按刘维尔发现的令人惊奇的步骤得到的等式都是成立的.



下面给出几何解释：

如图，观察图中小正方形的个数.

四边形$ABCD$恰为 1=1^3 个小正方形，

凹六边形$BEFGDC$中恰有 8=2^3 个小正方形，

四边形 $AEFG$ 中恰有 $9=(1+2)^2$ 个小正方形，
因为四边形 $AEFG$ 中小正方形个数恰好等于四边形 $ABCD$ 与凹六边形 $BEFGDC$ 小正方形个数之和，
所以 $1^3+2^3=(1+2)^2$；
凹六边形 $EHIJGF$ 中恰有 27= 3^3 个小正方形，
四边形 $AHIJ$ 中恰有 $36=(1+2+3)^2$ 个小正方形，
因为四边形 $AHIJ$ 中小正方形个数恰好等于四边形 $ABCD$、凹六边形 $BEFGDC$、凹六边形 $EHIJGF$ 中小正方形个数之和，
所以 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$；
凹六边形 $HKMNJI$ 中恰有 64= 4^3 个小正方形，
四边形 $AKMN$ 中恰有 $100=(1+2+3+4)^2$ 个小正方形，
因为四边形 $AKMN$ 中小正方形个数恰好等于四边形 $ABCD$、凹六边形 $BEFGDC$、凹六边形 $EHIJGF$、凹六边形 $HKMNJI$ 中小正方形个数之和，
所以 $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$；
……

这样，我们便给出了等式 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2$ 的一个几何解释.

我们得到:

定理 2　若一个自然数 A 能够写成 a^n (a 为质数),则 A 的每一个因数的因数的个数的立方和等于 A 的每一个因数的因数的个数的和的平方,且等于 $[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)]^2$.

即 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2=[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)]^2$.

3、对于能够写成 $a_1^n\times a_2$ (a_1、a_2 都是质数且不等, $n\in N^*$) 的自然数 A,探究刘维尔数论猜想的正确性

第一类: 当 $n=1$ 时, $A=a_1\times a_2$ (a_1、a_2 都是质数且不等).
首先确定 $A=a_1\times a_2$ 的因数，显然 $A=a_1\times a_2$ 的因数有:1, $a_1, a_2, a_1\times a_2$.
再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,
a_1 的因数为 1, a_1,有 2 个,
a_2 的因数为 1, a_2,有 2 个,
$a_1\times a_2$ 的因数为 1, $a_1, a_2, a_1\times a_2$,有 4 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得
$1^3+2^3+2^3+4^3=1+8+8+64=81=9^2$,
又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得
$(1+2+2+4)^2=9^2$,
于是,得到类似①式的等式:
$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2=9^2$.
因此，对于能够写成 $a_1\times a_2$ (a_1、a_2 都是质数且不等)的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第二类: 当 $n=2$ 时, $A=a_1^2\times a_2$ (a_1、a_2 都是质数且不等).
首先确定 $A=a_1^2\times a_2$ 的因数，显然 $A=a_1^2\times a_2$ 的因数有:1, $a_1, a_1^2, a_2, a_1\times a_2, a_1^2\times a_2$.
再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,
a_1 的因数为 1, a_1,有 2 个,
a_1^2 的因数为 1, a_1, a_1^2,有 3 个,

a_2 的因数为 $1, a_2$,有 2 个,

$a_1 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个,

$a_1^2 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2$,有 6 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 8 + 64 + 216 = 324,$

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6)^2 = 18^2 = 324,$

于是,得到类似①式的等式:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6)^2 = 324$.

因此，对于能够写成 $a_1^2 \times a_2$ (a_1、 a_2 都是质数且不等)的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第三类:当 $n = 3$ 时, $A = a_1^3 \times a_2$ (a_1、 a_2 都是质数且不等).

首先确定 $A = a_1^3 \times a_2$ 的因数，显然 $A = a_1^3 \times a_2$ 的因数有: $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1 的因数为 $1, a_1$,有 2 个,

a_1^2 的因数为 $1, a_1, a_1^2$,有 3 个,

a_1^3 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3$,有 4 个,

a_2 的因数为 $1, a_2$,有 2 个,

$a_1 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个,

$a_1^2 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2$,有 6 个,

$a_1^3 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2$,有 8 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 8 + 64 + 216 + 512 = 900,$

又将每一个因数的因数个数求和后平方,得

$(1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 6 + 8)^2 = 900,$

于是,得到类似①式的等式:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 6 + 8)^2 = 900$.

因此，对于能够写成 $a_1^3 \times a_2$ (a_1、 a_2 都是质数且不等)的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第四类:当 $n = 4$ 时, $A = a_1^4 \times a_2$ (a_1、 a_2 都是质数且不等).

首先确定 $A = a_1^4 \times a_2$ 的因数，显然 $A = a_1^4 \times a_2$ 的因数有:

$1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, a_1^4 \times a_2$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1 的因数为 $1, a_1$,有 2 个,

a_1^2 的因数为 $1, a_1, a_1^2$,有 3 个,

a_1^3 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3$,有 4 个,

a_1^4 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4$,有 5 个,

a_2 的因数为 $1, a_2$,有 2 个,

$a_1 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个,

$a_1^2 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2$,有 6 个,

$a_1^3 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2$,有 8 个,

$a_1^4 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, a_1^4 \times a_2$,有 10 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+2^3+4^3+6^3+8^3+10^3$

$=1+8+27+64+125+8+64+216+512+1000=2025,$

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2+3+4+5+2+4+6+8+10)^2=45^2=2025,$

于是,得到类似①式的等式:

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+2^3+4^3+6^3+8^3+10^3=(1+2+3+4+5+2+4+6+8+10)^2=2025.$

因此，对于能够写成$a_1^4\times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等)的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第五类:当$n=5$时, $A=a_1^5\times a_2$ (a_1、a_2都是质数且不等).

首先确定$A=a_1^5\times a_2$的因数, 显然$A=a_1^5\times a_2$的因数有:

$1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_1^5, a_2, a_1\times a_2, a_1^2\times a_2, a_1^3\times a_2, a_1^4\times a_2, a_1^5\times a_2.$

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1的因数为 $1, a_1$,有 2 个,

a_1^2的因数为 $1, a_1, a_1^2$,有 3 个,

a_1^3的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3$,有 4 个,

a_1^4的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4$,有 5 个,

a_1^5的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_1^5$,有 6 个,

a_2的因数为 $1, a_2$,有 2 个,

$a_1\times a_2$的因数为 $1, a_1, a_2, a_1\times a_2$,有 4 个,

$a_1^2\times a_2$的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1\times a_2, a_1^2\times a_2$,有 6 个,

$a_1^3\times a_2$的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1\times a_2, a_1^2\times a_2, a_1^3\times a_2$,有 8 个,

$a_1^4\times a_2$的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_2, a_1\times a_2, a_1^2\times a_2, a_1^3\times a_2, a_1^4\times a_2$,有 10 个,

$a_1^5\times a_2$的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_1^5, a_2, a_1\times a_2, a_1^2\times a_2, a_1^3\times a_2, a_1^4\times a_2, a_1^5\times a_2$,有 12 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+2^3+4^3+6^3+8^3+10^3+12^3$

$=1+8+27+64+125+216+8+64+216+512+1000+1728=3969,$

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$(1+2+3+4+5+6+2+4+6+8+10+12)^2=63^2=3969,$

于是,得到类似①式的等式:

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+2^3+4^3+6^3+8^3+10^3+12^3$

$=(1+2+3+4+5+6+2+4+6+8+10+12)^2=3969=63^2.$

因此，对于能够写成$a_1^5\times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等)的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

……

第 n 类:自然数为$A=a_1^n\times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等, $n\in N^*$).

首先确定$A=a_1^n\times a_2$的因数, 显然$A=a_1^n\times a_2$的因数有:

$1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n, a_2, a_1\times a_2, a_1^2\times a_2, a_1^3\times a_2, \cdots, a_1^n\times a_2.$

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1的因数为 $1, a_1$,有 2 个,

a_1^2的因数为 $1, a_1, a_1^2$,有 3 个,

a_1^3的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3$,有 4 个,

……………………………………………

a_1^n的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n$,有 $n+1$个,

a_2的因数为 $1, a_2$,有 2 个,

$a_1 \times a_2$的因数为 $1, a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个,

$a_1^2 \times a_2$的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2$,有 6 个,

$a_1^3 \times a_2$的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2$,有 8 个,

……………………………………………

$a_1^n \times a_2$的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, \cdots, a_1^n \times a_2$,有 $2n+2$ 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2$.

在第一类中,对于 $A=a_1 \times a_2$,证得相应结论

$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2=9^2$;

在第二类中,对于 $A=a_1^2 \times a_2$,证得相应结论

$1^3+2^3+3^3+2^3+4^3+6^3=(1+2+3+2+4+6)^2=324=18^2$;

在第三类中,对于 $A=a_1^3 \times a_2$,证得相应结论

$1^3+2^3+3^3+4^3+2^3+4^3+6^3+8^3=(1+2+3+4+2+4+6+8)^2=900=30^2$;

在第四类中,对于 $A=a_1^3 \times a_2$,证得相应结论

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+2^3+4^3+6^3+8^3+10^3=(1+2+3+4+5+2+4+6+8+10)^2=2025=45^2$;

在第五类中,对于 $A=a_1^5 \times a_2$,证得相应结论

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+2^3+4^3+6^3+8^3+10^3+12^3$

$=(1+2+3+4+5+6+2+4+6+8+10+12)^2=3969=63^2$.

于是,可以猜测,在第 n 类中,对于 $A=a_1^n \times a_2$,可以得到类似①式的等式:

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3$

$=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2$.   (***)

现对(***)式加以证明.

证法一(用定理 2 的结论证明):

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3$

$=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]$

$=9[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]$

又由定理 2 可得

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2=[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)]^2,$$

所以$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3=[\frac{3}{2}(n+1)(n+2)]^2$.

又$[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2$

$$=[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}(n+1)(2n+4)]^2=[\frac{(n+1)(3n+6)}{2}]^2=[\frac{3}{2}(n+1)(n+2)]^2,$$

所以$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3$

$=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2$.

从而（***）式得证.

证法二(用数学归纳法证明):

(1)当$n=1$时,左边$=1^3+2^3+2^3+4^3=81$,右边$=(1+2+2+4)^2=81$,所以等式成立.

(2)假设当$n=k$时,等式成立,即

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(k+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2k+2)^3$

$=[1+2+3+4+\cdots+(k+1)+2+4+6+8+\cdots+(2k+2)]^2$,

则$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(k+1)^3+[(k+1)+1]^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2k+2)^3+[2(k+1)+2]^3$

$=[1+2+3+4+\cdots+(k+1)+2+4+6+8+\cdots+(2k+2)]^2+(k+2)^3+(2k+4)^3$

$=[\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}+\dfrac{(k+1)(2k+4)}{2}]^2+9(k+2)^3=\dfrac{9}{4}[(k+1)(k+2)]^2+9(k+2)^3$

$=\dfrac{9}{4}(k+2)^2[(k+1)^2+4(k+2)]=\dfrac{9}{4}(k+2)^2(k^2+6k+9)=\dfrac{9}{4}(k+2)^2(k+3)^2$,　③

又$\{1+2+3+4+\cdots+(k+1)+[(k+1)+1]+2+4+6+8+\cdots+(2k+2)+[2(k+1)+2]\}^2$

$=\dfrac{9}{4}(k+2)^2(k+3)^2$,　④

所以由③④式得

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(k+1)^3+[(k+1)+1]^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2k+2)^3+[2(k+1)+2]^3$

$=\{1+2+3+4+\cdots+(k+1)+[(k+1)+1]+2+4+6+8+\cdots+(2k+2)+[2(k+1)+2]\}^2$

所以当$n=k+1$时,等式也成立.

由(1)(2)可知,等式对于一切$n\in N^*$都成立.

从而（***）式得证.

这也就证明了任何形如$a_1^n\times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等,$n\in N^*$)的自然数A,按刘维尔发现的令人惊奇的步骤得到的等式都是成立的.

我们得到:

定理 3　若一个自然数A能够写成$a_1^n\times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等,$n\in N^*$),则A的每一个因数的因数的个数的立方和等于A的每一个因数的因数的个数的和的平方,且等于$[\dfrac{3}{2}(n+1)(n+2)]^2$.

即$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3$

$=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2=[\dfrac{3}{2}(n+1)(n+2)]^2$.

4、对于能够写成$a_1^n\times a_2^m$(a_1、a_2都是质数且不等,n、$m\in N^*$)的自然数A,探究刘维尔数论猜想的正确性

设$A=a_1^n\times a_2^m=f(n,m)$.

第一类:当$m=1$时,$A=f(n,1)=a_1^n\times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等,$n\in N^*$).

首先确定$A=f(n,1)=a_1^n\times a_2$的因数，显然$A=f(n,1)=a_1^n\times a_2$的因数有:

$1,a_1,a_1^2,a_1^3,\cdots,a_1^n,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_1^3\times a_2,\cdots,a_1^n\times a_2$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1的因数为 1,a_1,有 2 个,

a_1^2的因数为 1,a_1,a_1^2,有 3 个,

a_1^3的因数为 1,a_1,a_1^2,a_1^3,有 4 个,

……………………………………

a_1^n 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n$,有 $n+1$ 个,

a_2 的因数为 $1, a_2$,有 2 个,

$a_1 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个,

$a_1^2 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2$,有 6 个,

$a_1^3 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2$,有 8 个,

…………………………………………

$a_1^n \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, \cdots, a_1^n \times a_2$,有 $2n+2$ 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + (n+1)^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \cdots + (2n+2)^3$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2$.

由定理 3 可以证得到类似①式的等式:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + (n+1)^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \cdots + (2n+2)^3$

$= [1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2$.

因此，对于能够写成 $a_1^n \times a_2$(a_1、a_2都是质数且不等, $n \in N^*$) 的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第二类:当 $m=2$ 时, $A = f(n,2) = a_1^n \times a_2^2$($a_1$、$a_2$都是质数且不等, $n \in N^*$).

首先确定 $A = f(n,2) = a_1^n \times a_2^2$ 的因数, 显然 $A = f(n,2) = a_1^n \times a_2^2$ 的因数有:

$1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, \cdots, a_1^n \times a_2, a_2^2, a_1 \times a_2^2, a_1^2 \times a_2^2, a_1^3 \times a_2^2, \cdots, a_1^n \times a_2^2$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1 的因数为 $1, a_1$,有 2 个,

a_1^2 的因数为 $1, a_1, a_1^2$,有 3 个,

a_1^3 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3$,有 4 个,

…………………………………………

a_1^n 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n$,有 $n+1$ 个,

a_2 的因数为 $1, a_2$,有 2 个,

$a_1 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_2, a_1 \times a_2$,有 4 个,

$a_1^2 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2$,有 6 个,

$a_1^3 \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2$,有 8 个,

…………………………………………

$a_1^n \times a_2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, \cdots, a_1^n \times a_2$,有 $2n+2$ 个.

a_2^2 的因数为 $1, a_2, a_2^2$,有 3 个,

$a_1 \times a_2^2$ 的因数为 $1, a_1, a_2, a_1 \times a_2, a_2^2, a_1 \times a_2^2$,有 6 个,

$a_1^2 \times a_2^2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_2^2, a_1 \times a_2^2, a_1^2 \times a_2^2$,有 9 个,

$a_1^3 \times a_2^2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, a_2^2, a_1 \times a_2^2, a_1^2 \times a_2^2, a_1^3 \times a_2^2$,有 12 个,

…………………………………………

$a_1^n \times a_2^2$ 的因数为 $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \cdots, a_1^n, a_2, a_1 \times a_2, a_1^2 \times a_2, a_1^3 \times a_2, \cdots, a_1^n \times a_2, a_2^2, a_1 \times a_2^2, a_1^2 \times a_2^2,$
$a_1^3 \times a_2^2, \cdots, a_1^n \times a_2^2$,有 $3n+3$ 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + (n+1)^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \cdots + (2n+2)^3 + 3^3 + 6^3 + 9^3 + 12^3 + \cdots + (3n+3)^3$,

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)]^2$.

因为$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3+3^3+6^3+9^3+12^3+\cdots+(3n+3)^3$

$=[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]+2^3[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]+3^3[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]$

$=(1^3+2^3+3^3)[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]$

$=(1+8+27)[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2=36[\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}]^2=9[(n+1)(n+2)]^2$,

又因为$[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)]^2$

$=\{[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]+2[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]+3[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]\}^2$

$=\{6[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]\}^2=[6\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}]^2=9[(n+1)(n+2)]^2$,

所以$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3+3^3+6^3+9^3+12^3+\cdots+(3n+3)^3$

$=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)]^2$.

因此，对于能够写成$a_1^n\times a_2^2$(a_1、a_2都是质数且不等,$n\in N^*$)的自然数A,刘维尔数论猜想是正确的.

……

第m类:自然数为$A=f(n,m)=a_1^n\times a_2^m$($a_1$、$a_2$都是质数且不等,$n$、$m\in N^*$).

首先确定$A=f(n,m)=a_1^n\times a_2^m$的因数，显然$A=f(n,m)=a_1^n\times a_2^m$的因数有:

1, a_1, a_1^2, $a_1^3,\cdots$, a_1^n, a_2, $a_1\times a_2$, $a_1^2\times a_2$, $a_1^3\times a_2,\cdots$, $a_1^n\times a_2$, a_2^2, $a_1\times a_2^2$, $a_1^2\times a_2^2$, $a_1^3\times a_2^2,\cdots$, $a_1^n\times a_2^2,\cdots,a_2^m,a_1\times a_2^m,a_1^2\times a_2^m,a_1^3\times a_2^m,\cdots$, $a_1^n\times a_2^m$.

再进一步确定上述每一个因数的因数的个数:

1 的因数为 1,有 1 个,

a_1的因数为 $1,a_1$,有 2 个,

a_1^2的因数为 $1,a_1,a_1^2$,有 3 个,

a_1^3的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3$,有 4 个,

……………………………………………

a_1^n的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3,\cdots,a_1^n$,有$n+1$个,

a_2的因数为 $1,a_2$,有 2 个,

$a_1\times a_2$的因数为 $1,a_1,a_2,a_1\times a_2$,有 4 个,

$a_1^2\times a_2$的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2$,有 6 个,

$a_1^3\times a_2$的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_1^3\times a_2$,有 8 个,

……………………………………………

$a_1^n\times a_2$的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3,\cdots,a_1^n,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_1^3\times a_2,\cdots,a_1^n\times a_2$,有$2n+2$个,

a_2^2的因数为 $1,a_2,a_2^2$,有 3 个,

$a_1\times a_2^2$的因数为 $1,a_1,a_2,a_1\times a_2,a_2^2,a_1\times a_2^2$,有 6 个,

$a_1^2\times a_2^2$的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_2^2,a_1\times a_2^2,a_1^2\times a_2^2$,有 9 个,

$a_1^3\times a_2^2$的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_1^3\times a_2,a_2^2,a_1\times a_2^2,a_1^2\times a_2^2,a_1^3\times a_2^2$,有 12 个,

……………………………………………

$a_1^n\times a_2^2$的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3,\cdots,a_1^n,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_1^3\times a_2,\cdots,a_1^n\times a_2,a_2^2,a_1\times a_2^2,a_1^2\times a_2^2$, $a_1^3\times a_2^2,\cdots,a_1^n\times a_2^2$,有$3n+3$个,

……………………………………………

a_2^m的因数为 $1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^m$,有$m+1$个,

$a_1\times a_2^m$的因数为 $1,a_1,a_2,a_1\times a_2,a_2^2,a_1\times a_2^2,\cdots,a_2^m,a_1\times a_2^m$,有$2m+2$个,

$a_1^2\times a_2^m$的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_2^2,a_1\times a_2^2,a_1^2\times a_2^2,\cdots,a_2^m,a_1\times a_2^m,a_1^2\times a_2^m$,

有 $3m+3$ 个,

……………………………………………

$a_1^n\times a_2^m$ 的因数为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3,\cdots,a_1^n,a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,a_1^3\times a_2,\cdots,a_1^n\times a_2,a_2^2,a_1\times a_2^2,a_1^2\times a_2^2,$ $a_1^3\times a_2^2,\cdots,a_1^n\times a_2^2,\cdots,a_2^m,a_1\times a_2^m,a_1^2\times a_2^m,a_1^3\times a_2^m,\cdots,a_1^n\times a_2^m$,有 $(m+1)(n+1)$ 个.

则将每一个因数的因数的个数的立方求和,得

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3+3^3+6^3+9^3+12^3+\cdots+(3n+3)^3$$
$$+\cdots+(m+1)^3+(2m+2)^3+(3m+3)^3+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]^3.$$

又将每一个因数的因数的个数求和后平方,得

$$\{1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)$$
$$+\cdots+(m+1)+(2m+2)+(3m+3)+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]\}^2.$$

在第 1 类中,对于自然数 $A=f(n,1)=a_1^n\times a_2$,证得相应结论

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3$$
$$=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)]^2;$$

在第 2 类中,对于自然数 $A=f(n,2)=a_1^n\times a_2^2$,证得相应结论

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3+3^3+6^3+9^3+12^3+\cdots+(3n+3)^3$$
$$=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)]^2.$$

于是,可以猜测,在第 m 类中,对于 $f(n,m)=a_1^n\times a_2^m$,可以得到类似①式的等式:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3+3^3+6^3+9^3+12^3+\cdots+(3n+3)^3$$
$$+\cdots+(m+1)^3+(2m+2)^3+(3m+3)^3+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]^3.$$
$$=\{1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)$$
$$+\cdots+(m+1)+(2m+2)+(3m+3)+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]\}^2.(****)$$

现对(****)式加以证明.

证明:因为

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3+3^3+6^3+9^3+12^3+\cdots+(3n+3)^3$$
$$+\cdots+(m+1)^3+(2m+2)^3+(3m+3)^3+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]^3$$
$$=[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]+2^3[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]+3^3[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]$$
$$+\cdots+(m+1)^3[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3]$$
$$=[1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3]\cdot[1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(m+1)^3]$$

又因为

$$\{1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)$$
$$+\cdots+(m+1)+(2m+2)+(3m+3)+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]\}^2$$
$$=\{[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]+2[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]+3[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]$$
$$+\cdots+(m+1)[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]\}^2$$
$$=\{[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]\cdot[1+2+3+4+\cdots+(m+1)]\}^2$$
$$=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2\cdot[1+2+3+4+\cdots+(m+1)]^2$$

而由定理 2 可得

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2,$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(m+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(m+1)]^2,$$

所以

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(n+1)^3+2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots+(2n+2)^3+3^3+6^3+9^3+12^3+\cdots+(3n+3)^3$$
$$+\cdots+(m+1)^3+(2m+2)^3+(3m+3)^3+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]^3.$$

$=\{1+2+3+4+\cdots+(n+1)+2+4+6+8+\cdots+(2n+2)+3+6+9+12+\cdots+(3n+3)$
$+\cdots+(m+1)+(2m+2)+(3m+3)+\cdots+[(m+1)n+(m+1)]\}^2$.

从而（****）式得证.

这也就证明了任何形如 $a_1^n\times a_2^m(a_1、a_2$都是质数且不等$,n、m\in N^*)$ 的自然数 A,按刘维尔发现的令人惊奇的步骤得到的等式都是成立的.

我们得到:

定理 4 若一个自然数 A 能够写成 $\boldsymbol{f(n,m)=a_1^n\times a_2^m(a_1、a_2}$**都是质数且不等**$\boldsymbol{,n、m\in N^*)}$,

则 $\boldsymbol{A=f(n,m)}$ 的每一个因数的因数的个数的立方和一定可以写成

$\boldsymbol{[1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3][1^3+2^3+3^3+\cdots+(m+1)^3]}$,

$\boldsymbol{A=f(n,m)}$ 的每一个因数的因数的个数的和的平方一定可以写成

$\boldsymbol{[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2\cdot[1+2+3+4+\cdots+(m+1)]^2}$,

且 $\boldsymbol{A=f(n,m)}$ 的每一个因数的因数的个数的立方和等于 $\boldsymbol{A=f(n,m)}$ 的每一个因数的因数的个数的和的平方,均等于$\boldsymbol{[\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(m+1)(m+2)]^2}$.

即$\boldsymbol{[1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3][1^3+2^3+3^3+\cdots+(m+1)^3]}$

$\boldsymbol{=[1+2+3+4+\cdots+(n+1)]^2\cdot[1+2+3+4+\cdots+(m+1)]^2}$

$\boldsymbol{=[\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(m+1)(m+2)]^2}$.

5、对于能够写成形如 $\boldsymbol{a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}}$ **(** $\boldsymbol{a_1}$ **、** $\boldsymbol{a_2}$ **、** $\boldsymbol{a_3}$ **、…、** $\boldsymbol{a_n}$ **都是质数并且两两不等,**$\boldsymbol{\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3、\cdots、\alpha_n\in N^*}$**)的自然数** $\boldsymbol{A}$**,探究刘维尔数论猜想的正确性**

设 $A=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

第一类:对于自然数 $A=f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ (a_1 是质数,$\alpha_1\in N^*$),由定理 2 可证得

$A=f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ 的各因数的因数的个数的立方和为

$1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3$,

$A=f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ 的各因数的因数的个数和的平方为

$[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_1+1)]^2$,

且有$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_1+1)]^2$.

因此，对于能够写成$a_1^{\alpha_1}(a_1$是质数$,\alpha_1\in N^*)$ 的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

第二类: 对于自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ (a_1 、 a_2 都是质数且不等,α_1、 $\alpha_2\in N^*$),由定理 4 可得

$A=f(\alpha_1,\alpha_2)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ 的各因数的因数的个数的立方和为

$[1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3][1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_2+1)^3]$,

$A=f(\alpha_1,\alpha_2)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ 各因数的因数的个数和的平方为

$[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_1+1)]^2\cdot[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_2+1)]^2$.

且有$[1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3][1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_2+1)^3]$

$=[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_1+1)]^2\cdot[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_2+1)]^2$.

因此，对于能够写成$a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ (a_1 、 a_2 都是质数且不等,α_1、 $\alpha_2\in N^*$)的自然数 A, 刘维尔数论猜想是正确的.

于是,我们可以做一个大胆猜测:

对于自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$($a_1$、$a_2$、$a_3$、$\cdots$、$a_n$都是质数并且两两不等,$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$、$\cdots$、$\alpha_n\in N^*$),

自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的因数的因数的个数的立方和为:

$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$,

自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的因数的因数的个数的和的平方为:

$\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2$

且有$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$

$=\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2$.

下面我们对这个大胆猜想证明如下.

证法一:

(1)首先确定所给自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的因数个数

自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$的每一个因数是形如$a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{i_n}$ $(0\le i_1\le\alpha_1,\ 0\le i_2\le\alpha_2,\cdots,0\le i_n\le\alpha_n)$的表达式，可以分$n$步来完成:

第 1 步：选取$a_1^{i_1}$,可以是$a_1^0,a_1^1,a_1^2,\cdots,a_1^{\alpha_1}$，有$\alpha_1+1$种取法;

第 2 步：选取$a_2^{i_2}$,可以是$a_2^0,a_2^1,a_2^2,\cdots,a_2^{\alpha_2}$，有$\alpha_2+1$种取法;

……

第n步：选取$a_n^{i_n}$,可以是$a_n^0,a_n^1,a_n^2,\cdots,a_n^{\alpha_n}$，有$\alpha_n+1$种取法.

由分步计数原理,可得,形如$a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{i_n}(0\le i_1\le\alpha_1,0\le i_2\le\alpha_2,\cdots,0\le i_n\le\alpha_n)$的表达式共有$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$个,

即自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{\alpha_n}$的因数共有$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$个.

(2)再进一步确定自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$每一个因数的因数个数

同 1 推导“自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{\alpha_n}$的因数共有$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$个”的方法可求出:

每一个因数$a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{i_n}(0\le i_1\le\alpha_1,0\le i_2\le\alpha_2,\cdots,0\le i_n\le\alpha_n)$的因数有$(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_n+1)$个.

(3)写出自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$所有因数的因数的个数的和的表达式

这个表达式为形如$(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_n+1)$ $(i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2;\cdots;i_n=0,1,2,\cdots,\alpha_n)$的所有自然数的和.

下证这些自然数的和可以进一步表示为积:

$[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]$.

实际上,上述积的展开式中的每一项,是从每一个中括号里任取一个数字的乘积,可以表示为:

$j_1j_2\cdots j_n(j_1=1,2,\cdots,\alpha_1,\alpha_1+1;\ j_2=1,2,\cdots,\alpha_2,\alpha_2+1;\cdots;\ j_n=1,2,\cdots,\alpha_n,\alpha_n+1)$,

令$j_1=i_1+1,\ j_2=i_2+1,\cdots,\ j_n=i_n+1$,

则$(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_n+1)$ $(i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2;\cdots;i_n=0,1,2,\cdots,\alpha_n)$,

它恰好表示因数$a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{i_n}$的因数的个数,

所以自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$的所有因数的因数的个数的和可以表示为积:

$[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]$.

(4)写出自然数$A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$所有因数的因数的个数的立方和的表达式

这个表达式为形如$(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_n+1)$ $(i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2;\cdots;i_n=0,1,2,\cdots,\alpha_n)$的所有自然数的立方和.

下证这些自然数的立方和可以进一步表示为积:

$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$.

实际上,上述积的展开式中的每一项,是从每一个中括号里任取一个数字的乘积,可以表示为:

$j_1^3 j_2^3\cdots j_n^3(j_1=1,2,\cdots,\alpha_1,\alpha_1+1;\ j_2=1,2,\cdots,\alpha_2,\alpha_2+1;\cdots;\ j_n=1,2,\cdots,\alpha_n,\alpha_n+1)$,

令 $j_1=i_1+1,\ j_2=i_2+1,\cdots,\ j_n=i_n+1$,

则 $(i_1+1)^3(i_2+1)^3\cdots(i_n+1)^3\ (i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2;\cdots;i_n=0,1,2,\cdots,\alpha_n)$,

它恰好表示因数 $a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{i_n}$ 的因子个数 $(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_n+1)$ 的立方,

所以自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ 的所有因数的因数的个数的立方和可以表示为积:

$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$.

(5)证明自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 所有因数的因数的个数的立方和与所有因数的因数个数的和的平方相等

由定理 2 可知

$1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3=[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]^2$,

$1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3=[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]^2$,

……

$1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3=[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]^2$,

所以

$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$

$=\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2$.

又自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ 的所有因数的因数的个数的立方和可以表示为积:

$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$,

自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ 的所有因数的因数的个数的和可以表示为积:

$[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]$,

所以自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ 的所有因数的因数的个数的立方和等于所有因数的因数的个数的和的平方.

得证.

证法二:用数学归纳法证明

(1)当 $n=1$ 时,自然数 $f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$,它的因数分别为 $1,a_1,a_1^2,a_1^3,\cdots,a_1^{\alpha_1}$,
这些因数的因数的个数分别为 1,2,3,4,⋯,α_1+1,
所以这些因数的因数的个数的立方和为 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3$,
这些因数的因数的个数的和的平方为 $[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_1+1)]^2$,
又由定理 2 可知 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3=[1+2+3+4+\cdots+(\alpha_1+1)]^2$,

所以当 $n=1$ 时,结论成立.

(2)假设当 $n=k$ 时,结论成立.
即自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}$ 的因数的个数的立方和为
$[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3][1^3+2^3+\cdots+(\alpha_2+1)^3]\cdots[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_k+1)^3]$,
自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}$ 的因数的个数的和的平方为
$\{[1+2+\cdots+(\alpha_1+1)][1+2+\cdots+(\alpha_2+1)]\cdots[1+2+\cdots+(\alpha_k+1)]\}^2$,
且 $[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3][1^3+2^3+\cdots+(\alpha_2+1)^3]\cdots[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_k+1)^3]$
$=\{[1+2+\cdots+(\alpha_1+1)][1+2+\cdots+(\alpha_2+1)]\cdots[1+2+\cdots+(\alpha_k+1)]\}^2$. ⑤
依证法一中的(1)的结论可知:
自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}$ 的因数共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ 个.
故可设这些因数分别为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$,对应的因数的个数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.

则由假设所得到的结论可知:

$\lambda_1^3+\lambda_2^3+\cdots+\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}^3=[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3][1^3+2^3+\cdots+(\alpha_2+1)^3]\cdots[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_k+1)^3]$,⑥

$[\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]^2=\{[1+2+\cdots+(\alpha_1+1)][1+2+\cdots+(\alpha_2+1)]\cdots[1+2+\cdots+(\alpha_k+1)]\}^2$,⑦

当 $n=k+1$ 时,

将自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}\times a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数按 a_{k+1} 的次数分为以下 $\alpha_{k+1}+1$ 类:

第一类:不含有 a_{k+1} 的因数,即 $a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}$ 的因数,分别为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$,

上述每一个因数对应的因数个数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.

第二类:含有 a_{k+1} 的因数,分别为 $\mu_1a_{k+1},\mu_2a_{k+1},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}$,

其中 $\mu_ia_{k+1}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数应该是 μ_i 的因数乘以 a_{k+1} 的因数所得的积,

而 μ_i 的因数有 λ_i 个,a_{k+1} 的因数为 1, a_{k+1},有 2 个,

根据乘法原理,$\mu_ia_{k+1}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数有 $2\lambda_i$ 个.

所以 $\mu_1a_{k+1},\mu_2a_{k+1},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}$ 的因数的个数分别为 $2\lambda_1,2\lambda_2,\cdots,2\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.

第三类:含有 a_{k+1}^2 的因数,分别为 $\mu_1a_{k+1}^2,\mu_2a_{k+1}^2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^2$,

其中 $\mu_ia_{k+1}^2(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数应该是 μ_i 的因数乘以 a_{k+1}^2 的因数所得的积,

而 μ_i 的因数有 λ_i 个,a_{k+1}^2 的因数为 1, a_{k+1}, a_{k+1}^2,有 3 个,

根据乘法原理,$\mu_ia_{k+1}^2(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数有 $3\lambda_i$ 个.

所以 $\mu_1a_{k+1}^2,\mu_2a_{k+1}^2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^2$ 的因数的个数分别为 $3\lambda_1,3\lambda_2,\cdots,3\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.

……

第 $\alpha_{k+1}+1$ 类:含有 $a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数,分别为 $\mu_1a_{k+1}^{\alpha_{k+1}},\mu_2a_{k+1}^{\alpha_{k+1}},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$,

其中 $\mu_ia_{k+1}^{\alpha_{k+1}}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数应该是 μ_i 的因数乘以 $a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数所得的积,

而 μ_i 的因数有 λ_i 个,$a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数为 1,$a_{k+1},a_{k+1}^2,\cdots,a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$,有 $\alpha_{k+1}+1$ 个,

根据乘法原理,$\mu_ia_{k+1}^{k+1}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数有 $(\alpha_{k+1}+1)\lambda_i$ 个.

所以 $\mu_1a_{k+1}^{k+1},\mu_2a_{k+1}^{k+1},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^{k+1}$ 的因数的个数分别为 $(\alpha_{k+1}+1)\lambda_1,(\alpha_{k+1}+1)\lambda_2,\cdots,(\alpha_{k+1}+1)\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.

再结合⑥式,可得自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}\times a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数的因数的立方和为:

$$[\lambda_1^3+\lambda_2^3+\cdots+\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}^3]+[(2\lambda_1)^3+(2\lambda_2)^3+\cdots+(2\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)})^3]$$
$$+\cdots+\{[(\alpha_{k+1}+1)\lambda_1]^3+[(\alpha_{k+1}+1)\lambda_2]^3+\cdots+[(\alpha_{k+1}+1)\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]^3\}$$
$$=[\lambda_1^3+\lambda_2^3+\cdots+\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}^3][1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)^3]$$
$$=[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3][1^3+2^3+\cdots+(\alpha_2+1)^3]\cdots[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_k+1)^3][1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)^3]$$

再结合⑦式,可得自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}\times a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数的因数的和的平方为:

$$\{[\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]+[2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]+\cdots+[(\alpha_{k+1}+1)\lambda_1+(\alpha_{k+1}+1)\lambda_2+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\}^2$$
$$=\{[\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}][1+2+3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)]\}^2$$
$$=\{[1+2+\cdots+(\alpha_1+1)][1+2+\cdots+(\alpha_2+1)]\cdots[1+2+\cdots+(\alpha_k+1)][1+2+3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)]\}^2$$

由定理 2 可得 $1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)^3=[1+2+3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)]^2$, ⑧

将⑤式与⑧式相乘得

$$[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_1+1)^3][1^3+2^3+\cdots+(\alpha_2+1)^3]\cdots[1^3+2^3+\cdots+(\alpha_k+1)^3][1^3+2^3+3^3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)^3]$$
$$=\{[1+2+\cdots+(\alpha_1+1)][1+2+\cdots+(\alpha_2+1)]\cdots[1+2+\cdots+(\alpha_k+1)][1+2+3+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)]\}^2$$

所以当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

由(1)(2)可知,对于一切 $n\in N^*$,命题都是正确的.

得证.

这也就证明了任何形如 $a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$（$a_1$、$a_2$、$a_3$、$\cdots$、$a_n$ 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、$\cdots$、$\alpha_n\in N^*$)的任意自然数 A,按刘维尔发现的令人惊奇的步骤得到的等式都是成立的.

又注意到:

$$[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]$$
$$=\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{2}\cdot\frac{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)}{2}$$
$$=\frac{1}{2^n}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_n+1)(\alpha_n+2).$$

我们可以得到

定理 5: 任一个自然数 A 都能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ (a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、$\cdots$、$\alpha_n\in N^*$)形式,

自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的每一个因数的因数的个数的立方和为:

$$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3],$$

自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的每一个因数的因数的个数的和的平方为:

$$\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2,$$

且有

$$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$$
$$=\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2$$
$$=[\frac{1}{2^n}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)]^2.$$

即自然数 A 的所有因数的因数的个数的立方和等于所有因数的因数的个数的和的平方,也等于

$$[\frac{1}{2^n}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)]^2.$$

我们还可以进一步将定理 5 做进一步阐释:

每一个大于 1 的自然数 A,都可以写成质数的连乘积形式,即

$$A=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{\alpha_n},$$

其中 $p_1<p_2<\cdots<p_n$, $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为质数,α_1、α_2、$\cdots$、$\alpha_n\in N^*$,并且这种表示是唯一的.

这个自然数 A 的正因数个数为 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$.

因此自然数 A 的每一个因数的因数的个数的立方的和是 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$ 个数的立方和，且这些个数的立方和又可以表示成非常优美的结构

$$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3],$$

自然数 A 的每一个因数的因数的个数的和的平方是 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$ 个数和的平方，且这些个数的和的平方又可以表示成非常优美的结构

$$\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2,$$

因为 $1^3+2^3+\cdots+\alpha_i^3+(\alpha_i+1)^3=[1+2+\cdots+\alpha_i+(\alpha_i+1)]^2\,(i=1,2,\cdots,n)$, 这就决定了必然有

$$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$$
$$=\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2$$
$$=[\frac{1}{2^n}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)]^2.$$

即自然数 A 的所有因数的因数的个数的立方的和等于所有因数的因数的个数和的平方,也等于

$$[\frac{1}{2^n}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)]^2. \qquad (*****)$$

由定理 5 可知,对于一切大于 1 的自然数,刘维尔数论猜想都是正确的.

例.按刘维尔惊奇的步骤写出自然数 2016 对应的一个等式.

解:因为 $2016=7^1\times3^2\times2^5$,所以 2016 的因数共有 $(1+1)\times(2+1)\times(5+1)=36$ 个.

它们分别是 1,7,3,2, $3^2,2^2$, $7\times3,7\times2,3\times2,2^3$, 2^4, $7^1\times3^2,7^1\times2^2,3^1\times2^2,3^2\times2^1,2^5$, $7^1\times2^3,3^1\times2^3,7^1\times3^1\times2^1$, $3^2\times2^2$, $7^1\times2^4,3^1\times2^4$, $7^1\times3^1\times2^2,7^1\times3^2\times2^1,7^1\times2^5,3^1\times2^5,3^2\times2^3$, $3^2\times2^4$, $7^1\times3^1\times2^3$, $7^1\times3^2\times2^2,3^2\times2^5$, $7^1\times3^1\times2^4,7^1\times3^1\times2^5,7^1\times3^2\times2^3$, $7^1\times3^2\times2^4$, $7^1\times3^2\times2^5$.

其中,1 这个因数的因数有 1 个,

7,3,2 这 3 个因数的因数均有 2 个,

$3^2,2^2$ 这 2 个因数的因数均有 3 个,

$7\times3,7\times2,3\times2,2^3$ 这 4 个因数的因数均有 4 个,

2^4 这个因数的因数有 5 个,

$7^1\times3^2,7^1\times2^2,3^1\times2^2,3^2\times2^1,2^5$ 这 5 个因数的因数均有 6 个,

$7^1\times2^3,3^1\times2^3,7^1\times3^1\times2^1$ 这 3 个因数的因数均有 8 个,

$3^2\times2^2$ 这个因数的因数有 9 个,

$7^1\times2^4,3^1\times2^4$ 这 2 个因数的因数均有 10 个,

$7^1\times3^1\times2^2,7^1\times3^2\times2^1,7^1\times2^5,3^1\times2^5,3^2\times2^3$ 这 5 个因数的因数均有 12 个,

$3^2\times2^4$ 这个因数的因数有 15 个,

$7^1\times3^1\times2^3$ 这个因数的因数有 16 个,

$7^1\times3^2\times2^2,3^2\times2^5$ 这 2 个因数的因数均有 18 个,

$7^1\times3^1\times2^4$ 这个因数的因数有 20 个,

$7^1\times3^1\times2^5,7^1\times3^2\times2^3$ 这 2 个因数的因数均有 24 个,

$7^1\times3^2\times2^4$ 这个因数的因数有 30 个,

$7^1\times3^2\times2^5$ 这个因数的因数有 36 个.

根据定理 5 可以得到等式:

$$1^3+2^3+2^3+2^3+3^3+3^3+4^3+4^3+4^3+4^3+5^3+6^3+6^3+6^3+6^3+6^3+8^3+8^3+8^3+9^3+10^3+10^3$$
$$+12^3+12^3+12^3+12^3+12^3+15^3+16^3+18^3+18^3+20^3+24^3+24^3+30^3+36^3$$
$$=(1+2+2+2+3+3+4+4+4+4+5+6+6+6+6+6+8+8+8+9+10+10$$
$$+12+12+12+12+12+15+16+18+18+20+24+24+30+36)^2$$

另解: 因为 $2016=7^1\times3^2\times2^5$,

由定理 5 得 $(1^3+2^3)(1^3+2^3+3^3)(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3)=[(1+2)(1+2+3)(1+2+3+4+5+6)]^2$,

所以 $(1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3)(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3)=[(1+2+2+3+4+6)(1+2+3+4+5+6)]^2$,

进一步展开得:

$$1^3+2^3+2^3+2^3+3^3+3^3+4^3+4^3+4^3+4^3+5^3+6^3+6^3+6^3+6^3+6^3+8^3+8^3+8^3+9^3+10^3+10^3$$
$$+12^3+12^3+12^3+12^3+12^3+15^3+16^3+18^3+18^3+20^3+24^3+24^3+30^3+36^3$$
$$=(1+2+2+2+3+3+4+4+4+4+5+6+6+6+6+6+8+8+8+9+10+10$$
$$+12+12+12+12+12+15+16+18+18+20+24+24+30+36)^2.$$

注:因为 $2016=7^1\times3^2\times2^5$,所以 $\alpha_1=1,\alpha_2=2,\alpha_3=5,n=3,$ 代入(*****)式,可以迅速得到 2016 的所有因数的因数的个数的立方的和、所有因数的因数的个数和的平方都等于

$$[\frac{1}{2^3}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)]^2=[\frac{1}{2^3}(1+1)(1+2)(2+1)(2+2)(5+1)(5+2)]^2$$

$=(\frac{1}{2^3}\times 2\times 3\times 3\times 4\times 6\times 7)^2=378^2.$

五、变式研究

定理 5 给出了能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ （a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式的自然数,它的所有因数的因数的个数的立方和与所有因数的因数的个数的和的平方的相等关系,且等于$[\frac{1}{2^n}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)]^2$.

数学家刘维尔对于大于 1 的自然数的每一个因数的因数个数的立方和与和的平方,给出了一个“惊人”的结论.那么，我们还可以对于自然数的因数的因数个数做哪些研究呢?

变式 1:能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ （a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式的自然数 A,它的所有因数的因数的平方和应该是何种结果?

定理 5 中,已经证得能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ （a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式的自然数 A,

它的每一个因数的因数的个数的立方和为:

$[1^3+2^3+\cdots+\alpha_1^3+(\alpha_1+1)^3]\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_2^3+(\alpha_2+1)^3]\cdot\cdots\cdot[1^3+2^3+\cdots+\alpha_n^3+(\alpha_n+1)^3]$,

它的因数的因数的个数的和的平方为:

$\{[1+2+\cdots+\alpha_1+(\alpha_1+1)]\cdot[1+2+\cdots+\alpha_2+(\alpha_2+1)]\cdot\cdots\cdot[1+2+\cdots+\alpha_n+(\alpha_n+1)]\}^2$,

同理可以得到:能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ （a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式的自然数 A,

它的每一个因数的因数的个数的平方和为:

$$[1^2+2^2+\cdots+\alpha_1^2+(\alpha_1+1)^2]\cdot[1^2+2^2+\cdots+\alpha_2^2+(\alpha_2+1)^2]\cdot\cdots\cdot[1^2+2^2+\cdots+\alpha_n^2+(\alpha_n+1)^2]$$

$$=\frac{(\alpha_1+1)[(\alpha_1+1)+1][2(\alpha_1+1)+1]}{6}\cdot\frac{(\alpha_2+1)[(\alpha_2+1)+1][2(\alpha_2+1)+1]}{6}\cdots\cdots\frac{(\alpha_n+1)[(\alpha_n+1)+1][2(\alpha_n+1)+1]}{6}$$

$$=\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(2\alpha_1+3)}{6}\cdot\frac{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(2\alpha_2+3)}{6}\cdots\cdots\frac{(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)(2\alpha_n+3)}{6}$$

$$=\frac{1}{6^n}[(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(2\alpha_1+3)]\cdot[(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(2\alpha_2+3)]\cdot\cdots\cdot[(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)(2\alpha_n+3)].$$

于是，可以得到

定理 6：能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ （a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式的自然数,它的所有因数的因数的个数的平方和等于:

$$\frac{1}{6^n}[(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(2\alpha_1+3)]\cdot[(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)(2\alpha_2+3)]\cdot\cdots\cdot[(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)(2\alpha_n+3)].$$

变式 2.能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ （a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式的自然数 A,它的所有因数的因数的积应该是何种结果?

第一类:当 $n=1$ 时，自然数 A 能够写成 $f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ （a_1 是质数,$\alpha_1\in N^*$)形式,

自然数 A 的因数为 $1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{\alpha_1}$,

上述每一个因数对应的因数个数分别为 $1,2,3,\cdots,\alpha_1+1$,

所以自然数 $A=f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ 的因数的因数的个数的积为 $1\times2\times3\times\cdots\times(\alpha_1+1)=(\alpha_1+1)!$.

第二类: 当 $n=2$ 时，自然数 A 能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ （a_1、a_2 都是质数并且不等, α_1、$\alpha_2\in N^*$）形式,

自然数 A 的因数为:

$1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{\alpha_1};1\times a_2,a_1\times a_2,a_1^2\times a_2,\cdots,a_1^{\alpha_1}\times a_2;1\times a_2^2,a_1\times a_2^2,a_1^2\times a_2^2,\cdots,a_1^{\alpha_1}\times a_2^2;\cdots;1\times a_2^{\alpha_2},a_1\times a_2^2,a_1^2\times a_2^{\alpha_2},\cdots,a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$.

上述每一个因数对应的因数个数分别为:

$1,2,3,\cdots,\alpha_1+1;1\times2,2\times2,3\times2,\cdots,(\alpha_1+1)\times2;1\times3,2\times3,3\times3,\cdots,(\alpha_1+1)\times3;\cdots;1\times(\alpha_2+1),2\times(\alpha_2+1),3\times(\alpha_2+1),\cdots,(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)$.

所以自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ 的因数的因数的个数的积为:

$$[1\times2\times3\times\cdots\times(\alpha_1+1)]\cdot\{(1\times2)\times(2\times2)\times(3\times2)\times\cdots\times[(\alpha_1+1)\times2]\}\cdot\{(1\times3)\times(2\times3)\times(3\times3)\times\cdots\times(\alpha_1+1)\times3\}\cdot\cdots\cdot$$
$$\{[1\times(\alpha_2+1)]\times[2\times(\alpha_2+1)]\times[3\times(\alpha_2+1)]\times\cdots\times[(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)]\}$$
$$=[1\times2\times3\times\cdots\times(\alpha_1+1)]\cdot2^{\alpha_1+1}[1\times2\times3\times\cdots\times(\alpha_1+1)]\cdot3^{\alpha_1+1}[1\times2\times3\times\cdots\times(\alpha_1+1)]\cdot\cdots\cdot(\alpha_2+1)^{\alpha_1+1}[1\times2\times3\times\cdots\times(\alpha_1+1)]$$
$$=(\alpha_1+1)!2^{\alpha_1+1}(\alpha_1+1)!3^{\alpha_1+1}(\alpha_1+1)!\cdot\cdots\cdot(\alpha_2+1)^{\alpha_1+1}(\alpha_1+1)!$$
$$=[(\alpha_1+1)!]^{\alpha_2+1}\cdot[2^{\alpha_1+1}\cdot3^{\alpha_1+1}\cdot\cdots\cdot(\alpha_2+1)^{\alpha_1+1}]$$
$$=[(\alpha_1+1)!]^{\alpha_2+1}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\alpha_1+1}$$

第三类: 当 $n=3$ 时，自然数 A 能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}$ （a_1、a_2、a_3 都是质数并且两两不等, α_1、α_2、$\alpha_3\in N^*$).

自然数 A 的因数为:

$a_1^{i_1}\times a_2^{i_2},a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3,a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2,\cdots,a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$, 其中的 $i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2$.

(情况 1) 因数 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ $(i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2)$ 的因数个数如表一:

表一

i_1 / $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数 / i_2	$i_1=0$	$i_1=1$	$i_1=2$	$\cdots$	$i_1=\alpha_1$
$i_2=0$	1	2	3	$\cdots$	α_1+1
$i_2=1$	1×2	2×2	3×2	$\cdots$	$(\alpha_1+1)\times2$
$i_2=2$	1×3	2×3	3×3	$\cdots$	$(\alpha_1+1)\times3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$i_2=\alpha_2$	$1\times(\alpha_2+1)$	$2\times(\alpha_2+1)$	$3\times(\alpha_2+1)$	$\cdots$	$(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)$

表中的因数的因数个数的积,实质上就是第二类研究的自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ 的因数的因数的个数的积,设为 T ,则 $T=[(\alpha_1+1)!]^{\alpha_2+1}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\alpha_1+1}$.

(情况 2) 因数 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3$ $(i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2)$ 的因数个数如表二:

表二

i_1 / $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3$ 的因数个数 / i_2	$i_1=0$	$i_1=1$	$i_1=2$	$\cdots$	$i_1=\alpha_1$
$i_2=0$	$1\cdot2$	$2\cdot2$	$3\cdot2$	$\cdots$	$(\alpha_1+1)\cdot2$
$i_2=1$	$(1\times2)\cdot2$	$(2\times2)\cdot2$	$(3\times2)\cdot2$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times2]\cdot2$
$i_2=2$	$(1\times3)\cdot2$	$(2\times3)\cdot2$	$(3\times3)\cdot2$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times3]\cdot2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$i_2=\alpha_2$	$[1\times(\alpha_2+1)]\cdot2$	$[2\times(\alpha_2+1)]\cdot2$	$[3\times(\alpha_2+1)]\cdot2$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)]\cdot2$

实际上，$a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3$ 的因数个数为 $(i_1+1)\cdot(i_2+1)\cdot 2$,而 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数为 $(i_1+1)\cdot(i_2+1)$，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3$ 的因数个数是 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数的 2 倍，

所以将表一中的 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数乘以 2,就得到表二中 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3$ 对应的因数个数，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3$ 的因数个数的积是 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数的积的 $2^{(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)}$ 倍，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3$ 的因数个数的积是 $2^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}T$.

(情况 3)因数 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2$ $(i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2)$ 的因数个数如表三:

表三

i_1 / $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2$ 的因数个数 / i_2	$i_1=0$	$i_1=1$	$i_1=2$	$\cdots$	$i_1=\alpha_1$
$i_2=0$	$1\cdot 3$	$2\cdot 3$	$3\cdot 3$	$\cdots$	$(\alpha_1+1)\cdot 3$
$i_2=1$	$(1\times 2)\cdot 3$	$(2\times 2)\cdot 3$	$(3\times 2)\cdot 3$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times 2]\cdot 3$
$i_2=2$	$(1\times 3)\cdot 3$	$(2\times 3)\cdot 3$	$(3\times 3)\cdot 3$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times 3]\cdot 3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$i_2=\alpha_2$	$[1\times(\alpha_2+1)]\cdot 3$	$[2\times(\alpha_2+1)]\cdot 3$	$[3\times(\alpha_2+1)]\cdot 3$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)]\cdot 3$

实际上，$a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2$ 的因数个数为 $(i_1+1)\cdot(i_2+1)\cdot 3$,而 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数为 $(i_1+1)\cdot(i_2+1)$，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2$ 的因数个数是 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数的 3 倍，

所以将表一中的 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数乘以 3,就得到表三中 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2$ 对应的因数个数，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2$ 的因数个数的积是 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数的积的 $3^{(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)}$ 倍，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^2$ 的因数个数的积是 $3^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}T$.

(情况⋯)

(情况 α_2+1)因数 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$ $(i_1=0,1,2,\cdots,\alpha_1;i_2=0,1,2,\cdots,\alpha_2)$ 的因数个数如表三:

表 α_2+1

i_1 / $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数个数 / i_2	$i_1=0$	$i_1=1$	$i_1=2$	$\cdots$	$i_1=\alpha_1$
$i_2=0$	$1\cdot(\alpha_3+1)$	$2\cdot(\alpha_3+1)$	$3\cdot(\alpha_3+1)$	$\cdots$	$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_3+1)$
$i_2=1$	$(1\times 2)\cdot(\alpha_3+1)$	$(2\times 2)\cdot(\alpha_3+1)$	$(3\times 2)\cdot(\alpha_3+1)$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times 2]\cdot(\alpha_3+1)$
$i_2=2$	$(1\times 3)\cdot(\alpha_3+1)$	$(2\times 3)\cdot(\alpha_3+1)$	$(3\times 3)\cdot(\alpha_3+1)$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times 3]\cdot(\alpha_3+1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$i_2=\alpha_2$	$[1\times(\alpha_2+1)]\cdot(\alpha_3+1)$	$[2\times(\alpha_2+1)]\cdot(\alpha_3+1)$	$[3\times(\alpha_2+1)]\cdot(\alpha_3+1)$	$\cdots$	$[(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)]\cdot(\alpha_3+1)$

实际上，$a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数个数为 $(i_1+1)\cdot(i_2+1)\cdot(\alpha_3+1)$,而 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数为 $(i_1+1)\cdot(i_2+1)$，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数个数是 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数的 α_3+1 倍，

所以将表一中的 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数乘以 α_3+1,就得到表三中 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 对应的因数个数，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数个数的积是 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}$ 的因数个数的积的 $(\alpha_3+1)^{(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)}$ 倍，

所以 $a_1^{i_1}\times a_2^{i_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数个数的积是 $(\alpha_3+1)^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}T$.

综上所述，自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数的因数个数的积是:

$T\cdot 2^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}T\cdot 3^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}T\cdot\cdots\cdot(\alpha_3+1)^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}T$

$=T^{\alpha_3+1}\cdot[\,2^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot 3^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\cdot\cdots\cdot(\alpha_3+1)^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\,]$

$=T^{\alpha_3+1}\cdot\ [\,2\times3\times\cdots\times(\alpha_3+1)]^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}$

$=T^{\alpha_3+1}\cdot\ [\,(\alpha_3+1)!]^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}$,

又$T=[(\alpha_1+1)!]^{\alpha_2+1}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\alpha_1+1}$,

所以自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数的因数个数的积可以进一步化为:

$\{[(\alpha_1+1)!]^{\alpha_2+1}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\alpha_1+1}\}^{\alpha_3+1}\cdot[(\alpha_3+1)!]^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}$

$=[(\alpha_1+1)!]^{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)}\cdot[(\alpha_3+1)!]^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}$

$=\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\cdot[(\alpha_3+1)!]^{\frac{1}{\alpha_3+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}$.

现对第一、第二、第三类的结果进行分析:

第一类中,自然数 $A=f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ 的因数的因数的个数的积为:

$(\alpha_1+1)!=\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\}^{\alpha_1+1}$;

第二类中,自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}$ 的因数的因数的个数的积为:

$[(\alpha_1+1)!]^{\alpha_2+1}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\alpha_1+1}=\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}$;

第三类中,自然数 $A=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}$ 的因数的因数的个数的积为:

$\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\cdot[(\alpha_3+1)!]^{\frac{1}{\alpha_3+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}$.

于是,可以大胆猜测一定可以得出一个优美的结论:

定理 7:能够写成 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\cdots\times a_n^{\alpha_n}$ (a_1、a_2、a_3、…、a_n 都是质数并且两两不等,α_1、α_2、α_3、…、$\alpha_n\in N^*$)形式的自然数,它的所有因数的因数的个数的积等于:

$\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\cdot\cdots\cdot[(\alpha_n+1)!]^{\frac{1}{\alpha_n+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)}$.

证明:用数学归纳法证明.

(1)当 $n=1$ 时,能够写成 $f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ (a_1 是质数,$\alpha_1\in N^*$)形式的自然数,它的因数为 $1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{\alpha_1}$,
上述每一个因数对应的因数个数分别为:$1,2,3,\cdots,\alpha_1+1$,

所以自然数 $A=f(\alpha_1)=a_1^{\alpha_1}$ 的因数的因数的个数的积为 $1\times2\times3\times\cdots\times(\alpha_1+1)=(\alpha_1+1)!=\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\}^{\alpha_1+1}$,

所以当 $n=1$ 时,结论成立.

(2)假设当 $n=k$ 时,结论成立.

即自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}$ 的所有因数的因数的个数的积为:

$\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\cdot\cdots\cdot[(\alpha_k+1)!]^{\frac{1}{\alpha_k+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.

因为自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}$ 的因数共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ 个.

故可设这些因数分别为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$,

上述每一个因数对应的因数个数分别为: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.

则由假设所得到的结论可知:

$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}=\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\cdot\cdots\cdot[(\alpha_k+1)!]^{\frac{1}{\alpha_k+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$. ⑨

当 $n=k+1$ 时,

将自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}\times a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数按 a_{k+1} 的次数分为以下 $\alpha_{k+1}+1$ 类:

第一类:不含有 a_{k+1} 的因数,即 $a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}$ 的因数,分别为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$,
上述每一个因数对应的因数个数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.
第二类:含有 a_{k+1} 的因数,分别为 $\mu_1 a_{k+1},\mu_2 a_{k+1},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}$,
其中 $\mu_i a_{k+1}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数应该是 μ_i 的因数乘以 a_{k+1} 的因数所得的积,
而 μ_i 的因数有 λ_i 个, a_{k+1} 的因数为 1, a_{k+1},有 2 个,
根据乘法原理, $\mu_i a_{k+1}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数有 $2\lambda_i$ 个.
所以 $\mu_1 a_{k+1},\mu_2 a_{k+1},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}$ 的因数的个数分别为 $2\lambda_1,2\lambda_2,\cdots,2\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.
第三类:含有 a_{k+1}^2 的因数,分别为 $\mu_1 a_{k+1}^2,\mu_2 a_{k+1}^2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^2$,
其中 $\mu_i a_{k+1}^2(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数应该是 μ_i 的因数乘以 a_{k+1}^2 的因数所得的积,
而 μ_i 的因数有 λ_i 个, a_{k+1}^2 的因数为 1, a_{k+1}, a_{k+1}^2,有 3 个,
根据乘法原理, $\mu_i a_{k+1}^2(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数有 $3\lambda_i$ 个.
所以 $\mu_1 a_{k+1}^2,\mu_2 a_{k+1}^2,\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^2$ 的因数的个数分别为 $3\lambda_1,3\lambda_2,\cdots,3\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.
……
第 $\alpha_{k+1}+1$ 类:含有 $a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数,分别为 $\mu_1 a_{k+1}^{\alpha_{k+1}},\mu_2 a_{k+1}^{\alpha_{k+1}},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$,
其中 $\mu_i a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数应该是 μ_i 的因数乘以 $a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数所得的积,
而 μ_i 的因数有 λ_i 个, $a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数为 1, $a_{k+1},a_{k+1}^2,\cdots,a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$,有 $\alpha_{k+1}+1$ 个,
根据乘法原理, $\mu_i a_{k+1}^{k+1}(i=1,2,3,\cdots,(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1))$ 的因数有 $(\alpha_{k+1}+1)\lambda_i$ 个.
所以 $\mu_1 a_{k+1}^{k+1},\mu_2 a_{k+1}^{k+1},\cdots,\mu_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}a_{k+1}^{k+1}$ 的因数的个数分别为 $(\alpha_{k+1}+1)\lambda_1,(\alpha_{k+1}+1)\lambda_2,\cdots,(\alpha_{k+1}+1)\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$.
所以自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}\times a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数的因数的积为:

$$[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\cdot\{(2\lambda_1)\cdot(2\lambda_2)\cdot\cdots\cdot[2\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\}\cdot\{(3\lambda_1)\cdot(3\lambda_2)\cdot\cdots\cdot[3\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\}\cdot$$
$$\{[(\alpha_{k+1}+1)\lambda_1]\cdot[(\alpha_{k+1}+1)\lambda_2]\cdot\cdots\cdot[(\alpha_{k+1}+1)\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\}$$
$$=[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\cdot 2^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\cdot$$
$$3^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]\cdot\cdots\cdot(\alpha_{k+1}+1)^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]$$
$$=[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]^{\alpha_{k+1}+1}\cdot[2^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}\cdot 3^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}\cdot\cdots\cdot(\alpha_{k+1}+1)^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]$$
$$=[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}]^{\alpha_{k+1}+1}\cdot[(\alpha_{k+1}+1)!]^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}. \qquad ⑩$$

将⑨代入⑩,可进一步得到自然数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\cdots\times a_k^{\alpha_k}\times a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 的因数的因数的积为:

$$\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\cdot\cdots\cdot[(\alpha_k+1)!]^{\frac{1}{\alpha_k+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)(\alpha_{k+1}+1)}\cdot(\alpha_{k+1}+1)!]^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$$
$$=\{[(\alpha_1+1)!]^{\frac{1}{\alpha_1+1}}\cdot[(\alpha_2+1)!]^{\frac{1}{\alpha_2+1}}\cdot\cdots\cdot[(\alpha_k+1)!]^{\frac{1}{\alpha_k+1}}\cdot[(\alpha_{k+1}+1)!]^{\frac{1}{\alpha_{k+1}+1}}\}^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)(\alpha_{k+1}+1)}$$

所以当 $n=k+1$ 时,命题也成立.
由(1)(2)可知,对于一切 $n\in N^*$,命题都是正确的.
定理 7 得证.

参考文献

[1]孙瑞清主编.《小学数学竞赛辅导（六年级适用）》，北京大学出版社，2002.4.
[2]李凯旋.刘维尔猜想的证明.中学数学研究 2006.8.