

完全对称不等式的取等判定

复旦大学附属中学 韩京俊

指导教师： 汪杰良 万军

完全对称不等式的取等判定

摘要:本文探讨了一类完全对称不等式的取等判定及其证明. 通过控制两个初等对称多项式, 利用函数的单调性及 Jensen 不等式, 说明了一类三元完全对称不等式取等的充要条件, 继而推广得到关于一类 n 元完全对称不等式取等的充要条件的若干定理, 并举例说明此方法在证明完全对称不等式中的应用. 由此推出有关完全对称不等式与轮换对称不等式的判定定理.

关键词: 不等式; 完全对称; 轮换对称; 三元; n 元; 取等判定

Equivalency condition of symmetric inequalities

Abstract: This paper researches on the judgement theorem and proof of the equivalency condition of a class of symmetric inequalities. By controlling two elementary symmetric polynomials and using the monotonicity of functions and Jensen inequality, it finds the necessary and sufficient condition of the equivalency a class of three-variables and n -variables symmetric inequalities. And we illustrate the application of this method in proof of these inequalities. Then we obtain several judgement theorems on symmetric and cyclic inequalities.

Key words: inequality; symmetric; cyclic; three-variables; n -variables; judgement theorem of the equivalency condition

1. 引言

不等式在数学及其它学科中有着广泛的应用, 但迄今证明不等式尚无通法和固定的陈法, 尤其在处理一些难度大的不等式时, 对其进行直接放缩很可能难以起效. 完全对称不等式因其特有的性质, 成为这一领域的研究热点. 有学者采用导数法、增量法、控制变量法或作一些局部调整的方法, 来处理此类不等式^[1-3]. 但这些方法有时运算量颇大, 常常难以成功. 杨路院士、陈胜利老师、姚勇先生、刘保乾先生等学者在这方面做了大量工作, 将计算机作为证明工具. 1985 年吴文俊院士在上海召开的一次学术会议上曾指出: 不等式的机器证明是“一大难题”^[4], 1987 年 Choi 等人得到了关于 n 个变元的 3 次对称形式正半定的充要条件^[5]. 1999 年 William Harris 在其著作中提出了 3 元 4 次及 5 次对称形式正半定的充要条件^[6]. 纵观这些结论都是次数不超过 5 次的. 2001 年 Vlad Timofte 讨论了 n 元 d 次对称形式在 R_+^n 上正半定的充要条件. 并作为特例给出了 4 次和 5 次对称形式正半定的充要条件, 但是他的结论在 $d > 5$ 的时候也是不好判定的^[7]. 1993 年以来, 陈胜利对相当广泛的一类三元对称形式的正半定问题作了深入的探讨^[8]. 时至今日对于 6 次 (或更高次) 的 n 个变元的对称型, 其正半定性是否可

以判定等系列问题仍未解决^[9]. 探究完全对称不等式的取等充要条件, 用取等条件来证明不等式, 迄今为止在国内尚未见相关文献报道. 本研究旨在探索完全对称不等式的取等条件, 给出三元及 n 元的取等判定定理, 由此得到三元 6 次齐次完全对称不等式以及三元 4 次齐次轮换对称不等式的判定定理, 并尝试在更高次不等式判定方面拓展, 为人工证明不等式深入研究开拓新的思路, 为计算机证明不等式进一步提供新的依据.

2. 一类三元完全对称不等式的取等判定定理

2.1 取等判定定理及证明

先介绍三元完全对称不等式的性质.

引理 1 三元多项式 $f(x, y, z)$ 为完全对称的充要条件是它是否能唯一地表示为关于初等多项式 $\sigma_1 = \sum x = x + y + z$, $\sigma_2 = \sum xy = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = \prod x = xyz$ (\sum, \prod 分别表示关于 x, y, z 轮换求和与求积, 下同) 的多项式 (由线性代数中的对称多项式基本定理可知), 记为 $f(x, y, z) = g(\sum x, \sum xy, xyz)$.

引理 2 三元完全对称多项式 $f(x, y, z)$ 可以唯一地表示为诸如关于 $\sigma_1 = \sum x$, $\sigma_2 = \sum x^2$, $\sigma_3 = \sum x^3$ 的多项式.

引理 3 四元完全对称 n 次齐次多项式 $f(x, y, z, t)$ 都可以唯一地表示为 $t^n g(\sum \frac{x}{t}, \sum \frac{xy}{t^2}, \frac{xyz}{t^3})$ 的形式.

下面给出三元完全对称不等式的取等判定定理及证明.

定理 1 对任意实数 a, b, c 有:

$$\frac{\sum ab \sum a + (6 \sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9} \leq abc \leq \frac{\sum ab \sum a + (6 \sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9},$$

$$\text{其中 } x_1 = \frac{\sum a + \sqrt{(\sum a)^2 - 3 \sum ab}}{3}, x_2 = \frac{\sum a - \sqrt{(\sum a)^2 - 3 \sum ab}}{3},$$

不等式的等号成立当且仅当 $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$

证明: 设实数 a, b, c 满足 $c \geq b \geq a$,

考察函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - \sum ax^2 + \sum abx - abc$,

则 $f'(x) = 3x^2 - 2 \sum ax + \sum ab$.

设 $f'(x)=0$ 的两根为 x_1, x_2 且 $x_1 \geq x_2$,

$$\text{则易求得: } x_1 = \frac{\sum a + \sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3}, x_2 = \frac{\sum a - \sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3} \quad (1)$$

若 $x_1 > x_2$, 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_2]$ 上单调递增; 在 $(x_2, x_1]$ 上单调递减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增.

又函数 $f(x)$ 有三个零点, 即 $f(a)=0, f(b)=0, f(c)=0$.

故必有 $a \leq x_2 \leq b \leq x_1 \leq c$, 所以 $f(x_2) \geq 0, f(x_1) \leq 0$.

$$\text{即 } x_2^3 - \sum ax_2^2 + \sum abx_2 - abc \geq 0, x_1^3 - \sum ax_1^2 + \sum abx_1 - abc \leq 0.$$

将 (1) 带入得:

$$\frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9} \leq abc \leq \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9}$$

此时不等式的任何一边等号成立当且仅当 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$.

定理 1 得证!

推论 1 对任意非负实数 a, b, c 有:

$$\max\left(\frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9}, 0\right) \leq abc \leq \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9}.$$

证明: 若 $\sum a^2 \leq 2\sum ab$, 则有:

$$\frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9} \leq abc \leq \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9},$$

$$\text{若 } \sum a^2 \geq 2\sum ab, \text{ 则有: } 0 \leq abc \leq \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9},$$

结合以上两种情况, 故我们有:

$$\max\left(\frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9}, 0\right) \leq abc \leq \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9}.$$

所以推论 1 得证!

定理 1 与推论 1 是很强的不等式, 在证明不等式中有广泛的应用.

定理 2 一个关于实数 a, b, c 的完全对称不等式 $f(\sum a, \sum ab, abc) \geq 0$, (由引理 1 知必然可

写成这种形式, 下同). 我们控制 $\sum a$, $\sum ab$ 不变, 将 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 看作是 abc 的函数.
(下同)

(i) 若 $f'(abc) \geq 0$, 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值在两数相等时取到, 且这两数不大于第三数, 函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等时取到, 且这两数不小于第三数.

(ii) 若 $f'(abc) = 0$, 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 在两数相等时可取到最值.

(iii) 若 $f'(abc) \leq 0$, 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值在两数相等时取到, 且这两数不小于第三数, 函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等时取到, 且这两数不大于第三数.

证明: 我们先证明定理 2(i) 考察三元组 $(x_1, x_1, y_1), (x_2, x_2, y_2)$

$$\text{其中: } x_1 = \frac{\sum a + \sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3}, \quad y_1 = \frac{\sum a - 2\sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3}$$

$$x_2 = \frac{\sum a - \sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3}, \quad y_2 = \frac{\sum a + 2\sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3}$$

(下面的 x_1, y_1, x_2, y_2 均是这样)

$$\text{此时: } x_1 + x_1 + y_1 = x_2 + x_2 + y_2 = a + b + c$$

$$x_1^2 + x_1 y_1 + x_1 y_1 = x_2^2 + x_2 y_2 + x_2 y_2 = ab + bc + ca$$

$$\text{而由定理 2 知: } \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9} \leq abc \leq \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9},$$

$$\text{事实上: } \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9} = x_1^2 y_1, \quad \frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_2}{9} = x_2^2 y_2$$

$$\text{所以有: } x_1^2 y_1 \leq abc \leq x_2^2 y_2$$

又 $f'(abc) \geq 0$, 即函数 $f(abc)$ 关于 abc 单调递增., 而此时 $\sum a, \sum ab$ 不变.

我们用 $(x_1, x_1, y_1), (x_2, x_2, y_2)$ 分别代替 (a, b, c) ,

$$\text{故有: } f(x_1 + x_1 + y_1, x_1^2 + x_1 y_1 + x_1 y_1, x_1^2 y_1) = f(\sum a, \sum ab, x_1^2 y_1) \leq f(\sum a, \sum ab, abc),$$

$$f(\sum a, \sum ab, abc) = f(x_2 + x_2 + y_2, x_2^2 + x_2 y_2 + x_2 y_2, abc) \leq f(x_2 + x_2 + y_2, x_2^2 + x_2 y_2 + x_2 y_2, x_2^2 y_2)$$

又显然有 $x_1 \geq y_1, x_2 \leq y_2$,

所以函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值在两数相等时取到,且这两数不大于第三数,

函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等时取到, 且这两数不小于第三数.

定理 2(i) 得证!

同理我们可证明定理 2(iii).

而若 $f'(abc) = 0$, 此时 abc 在函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 中次数为零,

故我们可用 $(x_1, x_1, y_1), (x_2, x_2, y_2)$ 中任何一组代替 (a, b, c) , 此时函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 值不变,

所以每一个函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的值必对应一组 (x_1, x_1, y_1) 和 (x_2, x_2, y_2) ,

于是当 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 取到最值时也必对应着一组 (x_1, x_1, y_1) 和 (x_2, x_2, y_2) ,

即函数在两数相等时可取到最值.

定理 2(ii) 得证!

所以定理 2 获证!

推论 2 一个关于非负实数 a, b, c 的完全对称不等式 $f(\sum a, \sum ab, abc) \geq 0$,

(i) 若 $f'(abc) \geq 0$ 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值在两数相等时取到, 且这两数不大于第三数;

函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等(且这两数不小于第三数) 时或在至少有一数等于 0 时取到.

(ii) 若 $f'(abc) = 0$ 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 在两数相等时可取到最值.

(iii) 若 $f'(abc) \leq 0$ 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等, 且这两数不大于第三数时取到;

函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值在两数相等(且这两数不小于第三数) 时, 或在至少有一数等于 0 时取到.

证明: 先证明推论 2(i)

当 x_1, y_1, x_2, y_2 非负时, 可完全仿照定理 2 的证明,

$$\text{而 } x_1 = \frac{\sum a + \sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3} \geq 0, \quad x_2 = \frac{\sum a - \sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3} \geq 0$$

$$y_2 = \frac{\sum a + 2\sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3} \geq 0,$$

故只需考虑 $y_1 = \frac{\sum a - 2\sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3} \leq 0$ 的情形,

此时有: $\sum a^2 \geq 2\sum ab$

我们考察三元组 $(x_3, y_3, 0)$, 其中:

$$x_3 = \frac{\sum a + \sqrt{(\sum a)^2 - 4\sum ab}}{2}, \quad y_3 = \frac{\sum a - \sqrt{(\sum a)^2 - 4\sum ab}}{2}$$

由 $\sum a^2 \geq 2\sum ab$ 可知 x_3, y_3 为实数,

而显然 $x_3 \geq 0, y_3 \geq 0$ 故 x_3, y_3 为非负实数,

此时 $x_3 + y_3 + 0 = \sum a$,

$x_3 y_3 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot y_3 = \sum ab$,

由于 $f'(abc) \geq 0$, 我们用 $(x_3, y_3, 0)$ 代替 (a, b, c) 则:

$$f(x_3 + y_3 + 0, x_3 y_3 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot y_3, 0 \cdot x_3 \cdot y_3) = f(\sum a, \sum ab, 0) \leq f(\sum a, \sum ab, abc)$$

故函数的最大值在两数相等时取到, 且这两数不大于第三数.

函数的最小值在两数相等(且这两数不小于第三数)或一数等于 0 时取到.

推论 2(i) 得证!

同理可证明推论 2(iii).

当 $f'(abc) = 0$ 时, 用 (x_2, x_2, y_2) 代替 (a, b, c) 可同定理 2(ii) 的方法证明, 故推论 2 获证!

定理 3 一个关于实数 a, b, c 的完全对称不等式 $f(\sum a, \sum ab, abc) \geq 0$,

(i) 若 $f'(abc) \geq 0$, 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值在两数相等时取到.

(ii) 若 $f''(abc) = 0$, 则可归结为定理 2 的一种情形.

(iii) 若 $f''(abc) \leq 0$, 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等时取到.

证明: 先证明定理 3(i)

由于 $f''(abc) \geq 0$, 此时 $f(abc)$ 为下凸函数, 故函数 $f(abc)$ 的最大值必在端点处取到.

故必有:

$$f(\sum a, \sum ab, abc) = f(x_1 + x_1 + y_1, x_1^2 + x_1y_1 + x_1y_1, abc) = f(x_2 + x_2 + y_2, x_2^2 + x_2y_2 + x_2y_2, abc) \\ \leq \max \{ f(x_1 + x_1 + y_1, x_1^2 + x_1y_1 + x_1y_1, x_1^2y_1), f(x_2 + x_2 + y_2, x_2^2 + x_2y_2 + x_2y_2, x_2^2y_2) \}$$

即函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值必在两数相等时取到.

定理 3(i) 得证!

同理可证明定理 3(iii).

由于 $f''(abc) = 0$, 即函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 中 abc 的次数小于 2, 此时 $f'(abc)$ 的符号必恒定, 故必可归结为定理 2 的一种情形.

定理 3(ii) 得证!

所以定理 3 获证!

推论 3 一个关于非负实数 a, b, c 的完全对称不等式 $f(\sum a, \sum ab, abc) \geq 0$.

(i) 若 $f''(abc) \geq 0$, 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最大值在两数相等或一数等于 0 时取到.

(ii) 若 $f''(abc) = 0$, 则可归结为推论 2 的一种情形, 此时函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最值在两数相等或一数等于 0 时取到.

(iii) 若 $f''(abc) \leq 0$, 则函数 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等或一数等于 0 时取到.

推论 3 可仿照定理 3 及推论 2 证明, 从略.

以上定理与推论证明的主要思想是将关于非负实数 a, b, c 完全对称的多项式, 写成 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的形式, 控制其中两个量 $\sum a, \sum ab$ 不变, 而对 abc 进行调整.

推论 4 三元非负 n 次 (不一定齐次) 完全对称不等式 $f(a, b, c) \geq 0$, 成立的充分必要条件为:

$$f(x, 1, 0) \geq 0 \text{ 及 } f(x, 1, 1) \geq 0 \quad (n \leq 5).$$

证明: 欲证不等式可写为 $f(\sum a, \sum ab, abc) \geq 0$, 由于不等式的次数小于等于 5, 故 abc 的次数小于等于 1, 此时 $f''(abc) = 0$, 故由推论 3 知, 函数的最值必在两数相等或有数为 0 时取到. 故若 $f(x, 1, 0) \geq 0$ 及 $f(x, 1, 1) \geq 0$, 则不等式必成立, 显然它也为不等式成立的必要条件, 故推论 4 得证!

注: 推论 4 强于陈胜利老师得到的三元非负齐四次完全对称不等式的结论^[10].

对于以上定理和推论, 我们可以进一步拓展:

拓展 1: 关于三元完全对称不等式, 可将 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 写成诸如 $g(\sum a, \sum a^2, \sum a^3)$ 的形式, 控制 $\sum a, \sum a^2$ 不变, 而调整 $\sum a^3$, 此时有类似结论. 这是因为这样的多项式, 诸如 $\sum a, \sum a^2$ 的量能唯一确定 $\sum a, \sum ab$, 而由于 $\sum a^3 = (\sum a)^3 + 3abc - 3\sum a \sum ab$, 故此时诸如 $\sum a^3$ 的变量即为 abc 为变量, 因此能得到类似的结论.

当原来的函数不在以上定理及推论的所适用的范围内时, 我们可对 a, b, c 作代换, 使得定理及推论对新的函数起效. (可见例 2)

拓展 2: 对于定义在实数或非负实数域上的四元完全对称 n 次齐次不等式的拓展:

对于定义在实数或非负实数域上的四元完全对称 n 次齐次不等式除去有数为 0 外, 都可等价于三元完全对称不等式.

证明: 对于在四元完全对称 n 次齐次不等式 $f(x, y, z, t) \geq 0$, 由引理 3 知四元对称 n 次齐次多项式 $f(x, y, z, t)$, 都可以唯一地表示为 $t^n g(\sum \frac{x}{t}, \sum \frac{xy}{t^2}, \frac{xyz}{t^3})$ 的形式.

故 $f(x, y, z, t) \geq 0 \Leftrightarrow t^n g(\sum \frac{x}{t}, \sum \frac{xy}{t^2}, \frac{xyz}{t^3}) \geq 0$, 即 $g(\sum \frac{x}{t}, \sum \frac{xy}{t^2}, \frac{xyz}{t^3}) \geq 0$,

即等价于关于 $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ 的三元完全对称不等式.

进而可以对定义在实数或非负实数域上的四元完全对称 n 次齐次不等式, 使用上述定理和推论.

对这类定理或推论适用的四元完全对称 n 次齐次不等式, 我们可将其中两元调整至相等, 并由齐次可令这两元为 1, 从而将其降为两元完全对称不等式.

2.2 应用

通过以下例题, 说明上述取等判定定理在证明不等式中的应用.

例 1. 求证: a, b, c 为非负实数时有:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2 \geq 0$$

证法 1: 由推论 1 可知:

$$\max\left(\frac{\sum ab \sum a + (6\sum ab - 2(\sum a)^2)x_1}{9}, 0\right) \leq abc, \quad (\text{其中 } x_1 = \frac{\sum a + \sqrt{(\sum a)^2 - 3\sum ab}}{3}),$$

作代换 $\sum a = p, (\sum a)^2 - 3\sum ab = t^2, abc = r$, 则显然有 $p \geq t$,

$$\text{故我们得到 } \max\left(\frac{(p+t)^2(p-2t)}{27}, 0\right) \leq r, \quad (2)$$

而原题等价于: $27r + 4pt^2 - p^3 \geq 0$.

若 $t \geq \frac{p}{2}$, 则原不等式显然成立.

若 $t \leq \frac{p}{2}$, 利用(2), 有 $27r \geq (p+t)^2(p-2t) = p^3 - 3t^2p - 2t^3 \geq p^3 - 4pt^2$,

故命题得证!

证法 2: 记不等式左边为 $f(\sum a, \sum ab, abc)$, 由于函数最高项次数小于等于 3, 故 abc 的次数小于等于 1, 故 $f''(abc) = 0$. 利用推论 3 可知 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等时取到, 不妨设 $a = c$, 故我们只需证明:

$$a^3 + b^3 + a^3 + 3a^2b - a^2b - ab^2 - a^3 - a^3 - b^2a - a^2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b(a-b)^2 \geq 0$$

故原不等式得证!

注: 本题为完整的著名的 Schur 不等式的一部分, 完整的 Schur 不等式可参见文献[11].

例 2. x, y, z 是三个非负实数, 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

求证: $\sum \frac{x}{x^3 + yz} \geq 3$,

证明: 我们作代换 $a = \frac{yz}{x}, b = \frac{xz}{y}, c = \frac{xy}{z}$,

则等价于: a, b, c 为非负实数满足 $\sum ab = 1$,

求证: $\sum \frac{1}{ab+c} \geq 3$,

$$\Leftrightarrow \sum (ab+c)(ac+b) - 3(ab+c)(ac+b)(bc+a) \geq 0,$$

$$\text{设 } f(\sum a, \sum ab, abc) = \sum (ab+c)(ac+b) - 3(ab+c)(ac+b)(bc+a),$$

则 $f''(abc) \geq 0$, 故由定理③(1)知 $f(\sum a, \sum ab, abc)$ 的最小值在两数相等, 或一数为 0 时取到.

若有一数为 0 时, 不妨设 $c = 0$, 则我们只需证明在 $ab = 1$ 条件下

证明: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 3$,

而 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{ab} = 3$, 情形有一数为 0 时得证!

若有两数相等时,不妨设 $a=c$, 则我们只需证明在 a,b 为非负实数, 且: $2ab+a^2=1$ 的条件下有: $\frac{2}{ab+a} + \frac{1}{a^2+b} \geq 3$,

$$\text{将 } b = \frac{1-a^2}{2a} \text{ 代入, } \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1-a^2}{2}+a} + \frac{1}{a^2+\frac{1-a^2}{2a}} \geq 3, \text{ 当 } a \in [0,1] \text{ 时,}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-(a^2+\frac{1-a^2}{2a})}{a^2+\frac{1-a^2}{2a}} \geq 2 \frac{\frac{1-a^2}{2}+a-1}{\frac{1-a^2}{2}+a},$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-a^2)(1+\frac{1}{2a})}{a^2+\frac{1-a^2}{2a}} + \frac{(1-a)^2}{\frac{1-a^2}{2}+a} \geq 0.$$

$\therefore a \in [0,1]$, 故上式成立, 即当有两数相等时原不等式成立.

故不等式获证!

注: 作代换巧妙地将原来的 9 次, 降为 6 次, 为使用定理创造了可能. 而作代换其实就是将函数看成 $f(\sum \frac{yz}{x}, \sum y^2, xyz)$ 的形式, 也就是我们说的对三元对称不等式的拓展.

例 3. a, b, c 为非负实数, 满足 $a+b+c=1$.

$$\text{求证: } \sum a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(abc)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$$

证明: 齐次化不等式并移项, 原不等式等价于: $\frac{\sqrt{3}}{2}(abc)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum a} \geq \frac{1}{2}(\sum a)^2 - \sum a^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(abc)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum a} \geq 2\sum ab - \sum a^2,$$

当 $\sum a^2 \geq 2\sum ab$ 时, 不等式显然成立,

当 $\sum a^2 \leq 2\sum ab$ 时, 我们设 $f(\sum a, \sum ab, abc) = \sqrt{3}(abc)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum a} - 2\sum ab + \sum a^2$,

则 $f'(abc) = \frac{1}{2}(abc)^{-\frac{1}{2}} \geq 0$, 故由定理 2(i) 知函数的最小值必在两数相等, 且这两数大于另一数时取到.

不妨设 $a=c$, 则 $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{a^2b}\sqrt{2a+b} \geq 2(a^2+2ab) - 2a^2 - b^2$, 且 $a \geq b$,

$$\Leftrightarrow 3a^2(2a+b) \geq b(4a-b)^2,$$

$$\Leftrightarrow 6a^3 + 3a^2b \geq 16a^2b + b^3 - 8ab^2,$$

$$\Leftrightarrow 6a^2(a-b) + 7ab(b-a) + b^2(a-b) \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(6a^2 - 7ab + b^2) \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(6a-b) \geq 0,$$

注意到 $a \geq b$ ，故上式显然结合两种情况知，

原不等式成立！

推论 2(i) 中有一个容易被忽略的细节：若 $\sum a^2 \leq 2\sum ab$ ，则最小值在两数相等(且这两数不小于第三数) 时取到，但在处理本题时却起到了关键的作用。

在这一节我们选取了应用取等判定定理证明不等式 3 道典型的例题。实际上取等判定定理在证明三元完全对称不等式中有广泛应用，限于篇幅这里不作一一列举。

3. 一类 n 元完全对称不等式的取等判定

3.1 一类 n 元完全对称不等式的取等判定定理

定理 4(i) 给定不全相等的非负实数 $a \geq b \geq c$ ， $m \leq 0$ 的实数 m ，对与变量 $x \leq y \leq z$ ，且满足： $x + y + z = a + b + c$ ， $x^m + y^m + z^m = a^m + b^m + c^m$ 。

(特别地当 $m = 0$ 时为 $xyz = abc$ ，下同)

必存在非负实数 x_1, x_2 ，当 $x = x_1$ 时有 $x = x_1 \leq y = z$ ，

当 $x = x_2$ 时，有 $x = x_2 = y \leq z$ ，

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时，有 $x < y < z$ 。

(ii) 给定不全相等且至多只有一个为 0 的非负实数 $a \geq b \geq c$ ， $m > 0$ 且 $m \neq 1$ 的实数 m ，对与变量 $x \leq y \leq z$ ，且满足： $x + y + z = a + b + c$ ， $x^m + y^m + z^m = a^m + b^m + c^m$ ，

必存在非负实数 x_1, x_2 ，当 $x = x_2$ 时，有 $x = x_2 = y \leq z$ 。

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时，有： $x < y < z$ 。

当 $x = x_1$ 时，有： $0 = x_1 = x < y \leq z$ 或 $x_1 = x \leq y = z$

证明：先做一些准备工作，将 y, z 看成 x 的函数，则由条件 $x + y + z = a + b + c$ ， $x^m + y^m + z^m = a^m + b^m + c^m$ 知：

$$1 + y' + z' = 0, \quad mx^{m-1} + my'y^{m-1} + mz'z^{m-1} = 0$$

$$\text{解得: } y' = \frac{x^{m-1} - z^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}, \quad z' = \frac{y^{m-1} - x^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}} \quad (\text{易验证当 } m=0 \text{ 时也成立})$$

而由 $x < z, z > y$ 得 $y' < 0, z' > 0$, 故 y 随着 x 的增加而单调递减, z 随着 x 的增加而单调递增.

先证明定理 4 (i) 当 $m=0$, 考察函数:

$$f(x) = x^3 - 2\sum ax^2 + (\sum a)^2 x - 4abc$$

$$f(0) = -4abc \leq 0, \quad f\left(\frac{\sum a}{3}\right) = \left(\frac{\sum a}{3}\right)^3 - 2\sum a\left(\frac{\sum a}{3}\right)^2 + (\sum a)^2 \frac{\sum a}{3} - 4abc > 0$$

故存在非负实数 x_1 , 使得 $f(x_1) = 0$, 且 $x_1 \in \left[0, \frac{\sum a}{3}\right)$, 令 $x = x_1$

此时 $(a+b+c-x_1)^2 x_1 = 4abc$, 即 $(y+z)^2 = 4yz$, 故只能为 $y = z$, 所以此时 $x = x_1 < y = z$

又 y 单调递减, 当 $x = x_1$ 时 $x < y$, 故存在一个 x_2 , 当 $x = x_2$ 时 $x = x_2 = y \leq z$

由 z 严格单调递增知在 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $x < y < z$

故当 $m=0$ 时定理得证!

当 $m < 0$ 时, 考察函数:

$$f(x) = 2(abcx)^{-m} - (x^{-m}((ab)^{-m} + (ac)^{-m} + (bc)^{-m}) - (abc)^{-m})\left(\frac{a+b+c-x}{2}\right)^{-m}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } f(0) = (abc)^{-m}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{-m} \geq 0.$$

$$\text{当 } x=c \text{ 时, } f(c) = 2(abc^2)^{-m} - c^{-2m}(a^{-m} + b^{-m})\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-m} \leq 0$$

而 $c < \frac{a+b+c}{3}$, 故存在 x_1 , 使 $0 \leq x_1 < \frac{a+b+c}{3}$, $f(x_1) = 0$, 此时仿 $m=0$ 的情形可得当 $x = x_1$

时 $y = z$, 故 $x = x_1 < y = z$, 又 y 单调递减, z 严格单调递增, 故存在一个 x_2 , 使得当 $x = x_2$ 时

$x = x_2 = y \leq z$, $x \in (x_1, x_2)$ 时, $x < y < z$.

当 $m < 0$ 时得证!

再证明定理 4 (ii), 当 $m > 1$ 时, 考察函数: $f(x) = a^m + b^m + c^m - x^m - 2\left(\frac{a+b+c-x}{2}\right)^m$,

显然 $f'(x) = -mx^{m-1} + m\left(\frac{a+b+c-x}{2}\right)^{m-1} > 0$, 当 $x \in \left(0, \frac{\sum a}{3}\right)$ 时

若 $f(0) \geq 0$, 则由 $f(0) \geq 0$ 知存在 y, z , 满足: $a^m + b^m + c^m = y^m + z^m$ 且 $y + z = a + b + c$ 且 $y > 0$.

我们取 $x_1 = 0$, 故此时 $x < y \leq z$

若 $f(0) < 0$, 又 $f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \sum a^m - 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m > 0$, 所以必存在 x_1 , 使得 $0 < x_1 < \frac{a+b+c}{3}$,

使得 $f(x_1) = 0$, 此时仿 $m = 0$ 的情形可得 $y = z$, 此时有 $x = x_1 < y = z$.

又 y 单调递减, z 严格单调递增, 不论是以上两种情况的任意一种都必然存在一个 x_2 ,

使得当 $x = x_2$ 时 $x = x_2 = y \leq z$, $x \in (x_1, x_2)$ 时, $x < y < z$.

当 $m > 1$ 时得证!

当 $0 < m < 1$ 时, 考察函数: $f(x) = a^m + b^m + c^m - x^m - 2\left(\frac{a+b+c-x}{2}\right)^m$,

显然 $f'(x) = -mx^{m-1} + m\left(\frac{a+b+c-x}{2}\right)^{m-1} < 0$, 当 $x \in \left(0, \frac{\sum a}{3}\right)$ 时

若 $f(0) \leq 0$, 由此知存在 y, z , 满足: $a^m + b^m + c^m = y^m + z^m$ 且 $y + z = a + b + c$ 且 $y > 0$. 我们取

$x_1 = 0$, 故此时 $x < y \leq z$

若 $f(0) > 0$, 又 $f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \sum a^m - 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m < 0$, 所以必存在 x_1 , 使得 $0 < x_1 < \frac{a+b+c}{3}$,

使得 $f(x_1) = 0$, 此时仿 $m = 0$ 的情形可得 $y = z$, 此时有 $x = x_1 < y = z$.

又 y 单调递减, z 严格单调递增, 不论是以上两种情况的任意一种都必然存在一个 x_2 , 使得

当 $x = x_2$ 时 $x = x_2 = y \leq z$, $x \in (x_1, x_2)$ 时, $x < y < z$.

当 $m < 1$ 时得证!

所以定理得证!

注: 当 $m > 0$ 时, 若 a, b, c 中有两数为 0, 则只可能是 $x = y < z$.

定理 5 对于非负实数 (x, y, z) 及形如 $F(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$ 的函数, 记

$$g(x^{m-1}) = f'(x)$$

(i) 若 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为下凸函数.

当 $m > 0$ 时, $F(x, y, z)$ 的最小值在 $x \leq y = z$ 或 $0 = x < y \leq z$ 时取到, 最大值在 $x = y \leq z$ 时

取到.

当 $m \leq 0$ 时, $F(x, y, z)$ 的最小值在 $x \leq y = z$ 时取到, 最大值在 $x = y \leq z$ 时取到.

(ii) 若 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为上凸函数.

$m > 0$ 时, $F(x, y, z)$ 的最大值在 $x \leq y = z$ 或 $0 = x < y \leq z$ 时取到, 最小值在 $x = y \leq z$ 时取到.

$m \leq 0$ 时, $F(x, y, z)$ 的最大值在 $x \leq y = z$ 时取到, 最小值在 $x = y \leq z$ 时取到.

若 $f(x), g(x)$ 是连续函数, 则 $F(x, y, z)$ 在最小值与最大值之间是连续的, 即之间的每个值都能取到.

证明: 先讨论 $g(x)$ 为下凸函数的情形.

我们控制 $x + y + z, x^m + y^m + z^m$ 不变 (m 为不为 1 的实数), 此时存在不全相等的非负实数 $a \geq b \geq c$ ($m > 0$ 时, 这样的 a, b, c 至多只有一个为 0), 满足: $x + y + z = a + b + c$, $x^m + y^m + z^m = a^m + b^m + c^m$, 将 y, z 看成 x 的函数, 则由条件 $x + y + z = a + b + c$, $x^m + y^m + z^m = a^m + b^m + c^m$ 知:

$$1 + y' + z' = 0, \quad mx^{m-1} + my'y^{m-1} + mz'z^{m-1} = 0$$

$$\text{解得: } y' = \frac{x^{m-1} - z^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}, \quad z' = \frac{y^{m-1} - x^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}} \quad (\text{易验证当 } m=0 \text{ 时也成立})$$

$$\text{则 } F'(x) = f'(x) + y'f'(y) + z'f'(z) = f'(x) + \frac{x^{m-1} - z^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(y) + \frac{y^{m-1} - x^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(z), \quad \text{故:}$$

$$\frac{F'(x)}{(x^{m-1} - z^{m-1})(y^{m-1} - x^{m-1})} = \frac{f'(x)}{(x^{m-1} - z^{m-1})(x^{m-1} - y^{m-1})} + \frac{f'(y)}{(y^{m-1} - z^{m-1})(y^{m-1} - x^{m-1})} + \frac{f'(z)}{(z^{m-1} - x^{m-1})(z^{m-1} - y^{m-1})}$$

又 $g(x^{m-1}) = f'(x), g(y^{m-1}) = f'(y), g(z^{m-1}) = f'(z)$, 故:

$$\frac{F'(x)}{(x^{m-1} - z^{m-1})(y^{m-1} - x^{m-1})} = \frac{g(x^{m-1})}{(x^{m-1} - z^{m-1})(x^{m-1} - y^{m-1})} + \frac{g(y^{m-1})}{(y^{m-1} - z^{m-1})(y^{m-1} - x^{m-1})} + \frac{g(z^{m-1})}{(z^{m-1} - x^{m-1})(z^{m-1} - y^{m-1})}$$

由 $x \leq y \leq z$ 知: $(x^{m-1} - z^{m-1})(x^{m-1} - y^{m-1}) \geq 0, (z^{m-1} - x^{m-1})(z^{m-1} - y^{m-1}) \geq 0,$

$(z^{m-1} - y^{m-1})(y^{m-1} - x^{m-1}) \geq 0$, 又 $g(x)$ 为下凸函数, 故由 Jensen 不等式知:

$$\frac{g(x^{m-1})}{(x^{m-1} - z^{m-1})(x^{m-1} - y^{m-1})} + \frac{g(z^{m-1})}{(z^{m-1} - x^{m-1})(z^{m-1} - y^{m-1})} \geq$$

$$\left(\frac{1}{(x^{m-1}-z^{m-1})(x^{m-1}-y^{m-1})} + \frac{1}{(z^{m-1}-x^{m-1})(z^{m-1}-y^{m-1})} \right) g\left(\frac{\frac{x^{m-1}}{(x^{m-1}-z^{m-1})(x^{m-1}-y^{m-1})} + \frac{z^{m-1}}{(z^{m-1}-x^{m-1})(z^{m-1}-y^{m-1})}}{\frac{1}{(x^{m-1}-z^{m-1})(x^{m-1}-y^{m-1})} + \frac{1}{(z^{m-1}-x^{m-1})(z^{m-1}-y^{m-1})}} \right)$$

$$= \frac{g(y^{m-1})}{(z^{m-1}-y^{m-1})(y^{m-1}-x^{m-1})}, \text{ 即 } F'(x) \text{ 单调递增, 由定理 4 知, } m > 0 \text{ 时, } F(x, y, z) \text{ 的最小值在}$$

$x \leq y = z$ 或 $0 = x < y \leq z$ 时取到, 最大值在 $x = y \leq z$ 时取到. $m \leq 0$ 时, $F(x, y, z)$ 的最小值在 $x \leq y = z$ 时取到, 最大值在 $x = y \leq z$ 时取到.

同理当 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为上凸函数. $m > 0$ 时, $F(x, y, z)$ 的最大值在 $x \leq y = z$ 或 $0 = x < y \leq z$ 时取到, 最小值在 $x = y \leq z$ 时取到.

$m \leq 0$ 时, $F(x, y, z)$ 的最大值在 $x \leq y = z$ 时取到, 最小值在 $x = y \leq z$ 时取到.

定理 5 得证!

注 1: 对于形如 $F(x, y, z) = f(x, y) + f(y, z) + f(z, x)$ 的函数 (其中 $f(x, y)$ 表示关于 x, y 对称的函数), 我们可控制 $\sum x$, $\sum x^2$ 或 $\sum xy$, xyz 不变来处理问题.

$$\text{只需注意到, } xy = -\frac{1}{2} \sum x^2 + \frac{1}{2} (\sum x)^2 + z^2 - z(x+y+z), \quad xy = \frac{xyz}{z}, \quad x+y = x+y+z-z$$

而关于 x, y 对称的函数必能表示成关于 xy , $x+y$ 的函数.

注 2: 以上所指的 $F(x, y, z)$ 的最值均建立在 $F(x, y, z)$ 的最值存在的条件下, 下同.

定理 6: 对于非负实数 (x, y, z) 及形如 $F(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$ 的函数, 记

$$h(x^{m-1}) = \frac{f''(x)}{(x^{m-1}-z^{m-1})(x^{m-1}-y^{m-1})}$$

(i) 当 $m > 0$ 时, 对于非负实数 x ,

若 $f'(x) \leq 0$, $f''(x) \geq 0$ 或 $h(x)$ 为下凸函数. $F(x, y, z)$ 的最大值在两数相等或有数为 0 时取到.

若 $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$ 或 $h(x)$ 为上凸函数. $F(x, y, z)$ 的最小值两数相等或有数为 0 时取到.

(ii) 当 $m \leq 0$ 时, 对于非负实数 x ,

若 $f'(x) \leq 0$, $f''(x) \geq 0$ 或 $h(x)$ 为下凸函数. $F(x, y, z)$ 的最大值在两数相等时取到.

若 $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$ 或 $h(x)$ 为上凸函数. $F(x, y, z)$ 的最小值在两数相等时取到.

并且若函数 $f(x)$ 在取到最小值与最大值之间是连续的, 即之间的每个值都能取到.

由于证明与定理 5 类似, 我们这里给出简证.

简证: 我们先证明定理 6(i).

同定理 5 的证明知: $y' = \frac{x^{m-1} - z^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}$, $z' = \frac{y^{m-1} - x^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}$ (易验证当 $m=0$ 时也成立)

则 $F'(x) = f'(x) + y'f'(y) + z'f'(z) = f'(x) + \frac{x^{m-1} - z^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(y) + \frac{y^{m-1} - x^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(z)$, 故:

$$F''(x) = f''(x) + \frac{(m-1)x^{m-2}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(y) - \frac{(m-1)x^{m-2}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(z) + \left(\frac{x^{m-1} - z^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}\right)^2 f''(y) + \left(\frac{y^{m-1} - x^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}\right)^2 f''(z)$$

若 $f'(x) \leq 0$, 则 $\frac{(m-1)x^{m-2}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(y) - \frac{(m-1)x^{m-2}}{z^{m-1} - y^{m-1}}f'(z) \geq 0$

于是若 $f''(x) \geq 0$, 则 $F''(x) \geq 0$.

若 $h(x)$ 为下凸函数, 则 $f''(x) + \left(\frac{x^{m-1} - z^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}\right)^2 f''(y) + \left(\frac{y^{m-1} - x^{m-1}}{z^{m-1} - y^{m-1}}\right)^2 f''(z) =$

$$(x^{m-1} - z^{m-1})^2 (y^{m-1} - x^{m-1})^2 \left(\frac{h(x^{m-1})}{(x^{m-1} - z^{m-1})(x^{m-1} - y^{m-1})} + \frac{h(y^{m-1})}{(y^{m-1} - z^{m-1})(y^{m-1} - x^{m-1})} + \frac{h(z^{m-1})}{(z^{m-1} - x^{m-1})(z^{m-1} - y^{m-1})} \right) \geq 0$$

(由 Jensen 不等式知), 于是 $F''(x) \geq 0$

故 $F(x)$ 的最大值必在端点处取到, 即 $F(x, y, z)$ 的最大值必在两数相等或有数为 0 时取到.

同理我们可证明 $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$ 或 $h(x)$ 为上凸函数的情况. 于是定理 6(i) 得证!

类似的我们可以证明定理 6(ii).

故定理 6 得证!

定理 7 对于非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 及一个形如 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

的函数, 记 $g(x^{m-1}) = f'(x)$. ($n \geq 3, n$ 是正整数)

(i) 若 $g(x)$ 为下凸函数. $m > 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或有 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到. (其中 $1 \leq d \leq n-1$, $d \in N$, 下同)

$m \leq 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取到, 最大值在

$x_1 = x_2 = \dots x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

(ii) 若 $g(x)$ 为上凸函数. $m > 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最大值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或有 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时取到, 最小值在 $x_1 = x_2 = \dots x_{n-1} \leq x_n$ 取到.

$m \leq 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最大值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取到, 最小值在 $x_1 = x_2 = \dots x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

若 $f(x)$, $g(x)$ 是连续函数, 则 $F(x, y, z)$ 在最小值与最大值之间是连续的, 即之间的每个值都能取到.

证明: 先证明 $g(x)$ 为下凸函数的情形.

当 $m > 0$ 时, 先证明函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 取到最小值时必有 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$, 或有 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等. 我们分别调整 x_1, x_2, \dots, x_n 中的三个数 x_i, x_j, x_k , ($1 \leq i < j < k \leq n$) (且 x_i, x_j, x_k 中至多只有一个为 0), 控制其余的 $n-3$ 个变元及 $x_i + x_j + x_k$, $x_i^m + x_j^m + x_k^m$ ($m \in R, m \neq 1$) 不变, 使得 $F(x_i, x_j, x_k)$ 达到最小, 由定理 5 知 $F(x_i, x_j, x_k)$ 最小时必有 $x_i \leq x_j = x_k$ 或 $0 = x_i < x_j \leq x_k$.

由于当调整进行至 (x_1, x_2, \dots, x_n) 且 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时, 调整无法进行, 我们称之为调整结束, 故我们只需证明调整无法进行时只能为这两种情况.

假设当调整至 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ 时调整无法进行, 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

若 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 中有数为 0, 设 x_{d+1} 是最小的非 0 的数. 若 $d = n-1, n-2$ 则命题已经得证(故 $n=3$ 时得证). 当 $d \leq n-3$ 时(此时 $n \geq 4$), 考察数组 $(x_{d+1}, x_{d+2}, x_n), (x_{d+1}, x_{d+3}, x_n), \dots, (x_{d+1}, x_{n-1}, x_n)$. 由于 $g(x)$ 为下凸函数, 故 $F(x_{d+1}, x_i, x_n)$, ($d+2 \leq i \leq n-1$) 取到最小值时必有 $x_{d+1} \leq x_i = x_n$, 综合这 $n-d-2$ 个式子知调整结束时有 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等.

当 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 均为正数时, 同理我们可以证明: $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

故当 $m > 0$ 时, 函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 取到最小值时必有 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$, 或有 d 个数为

0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等.

类似地, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 取到最大值时必有 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$.

于是当 $m > 0$ 时命题得证!

类似地, 当 $m \leq 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

故 $g(x)$ 为下凸函数的情形获证!

同理当 $g(x)$ 为上凸函数, $m > 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最大值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或有 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时取到, 最小值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 取到.

$m \leq 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最大值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取到, 最小值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

定理 7 得证!

用相似的证明我们可得到关于定理 6 的 n 元形式的推广, 限于篇幅, 这里就省略了.

推论 5 (i) 对于 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为非负实数, $x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m$ ($m \in \mathbb{R}, m \neq 1$)

为定值的函数: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ ($p \in \mathbb{R}, p \neq 1, m$), 特别地当 $p=0$ 时为:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \quad (n \geq 3, n \text{ 是正整数})$$

当 $p(p-1)(p-m) \geq 0$ 及 $p \neq 0$ 时或 $p=0$ 及 $m > 0$ 时:

若 $m > 0$, 此时 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

若 $m \leq 0$, 此时 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

(ii) 对于 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为非负实数, $x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m$ ($m \in \mathbb{R}, m \neq 1$) 为定值的函数: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ ($p \in \mathbb{R}, p \neq 1, m$), 特别的 $p=0$ 时为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ ($n \geq 3, n$ 是正整数),

当 $p(p-1)(p-m) \leq 0$ 及 $p \neq 0$ 时或 $p=0$ 及 $m < 0$ 时:

若 $m > 0$, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最大值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时取到, 最小值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

若 $m \leq 0$, 此时 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最大值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取到, 最小值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

若 $f(x), g(x)$ 是连续函数, 则 $F(x, y, z)$ 在最小值与最大值之间是连续的, 即之间的每个值都能取到.

证明: 先证明推论 5(i), 若 $p \neq 0$, 记 $g(x^{m-1}) = f'(x)$, 由于 $g''(x) = p \frac{(p-1)(p-m)}{(m-1)^2} x^{\frac{p-2m+1}{m-1}} \geq 0$

故由定理 6 知当 $m > 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到; 当 $m \leq 0$ 时, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

若 $p = 0$, 记 $f(x) = \ln(x)$, $g(x^{m-1}) = f'(x)$, 由于 $g''(x) = \frac{m}{(m-1)^2} x^{\frac{-2m+1}{m-1}} \geq 0$

而 $\ln(x)$ 是连续函数, 所以 $\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或 d 个数趋向于 0,

$n-d-1$ 个数相等时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到. 即 $\prod_{i=1}^n x_i$ 的最小值在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 或 d 个数为 0, 至少 $n-d-1$ 个正数相等时取到, 最大值在 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 时取到.

推论 5(i) 得证! 同理可证明推论 5(ii)!

于是推论 5 得证!

注: 在推论 5(i) 中取 $n=3, m=2, p=0$, 则得到当 $x+y+z, x^2+y^2+z^2$ 不变 (即 $x+y+z, xy+yz+zx$ 不变, 这是因为 $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2$) 时, xyz 的最小值在 $x \leq y = z$ 或有数为 0 时取到, 最大值在 $x = y \leq z$ 时取到. 这即是推论 1, 也是证明定理 2、3 和推论 2、3 中的核心.

在推论 5(i) 中, 取 $n=3, m=0, p=2$, 则得到当 $x+y+z, xyz$ 不变时, $x^2+y^2+z^2$ 的最小值

在 $x \leq y = z$ 时取到, 最大值在 $x = y \leq z$ 时取到. 即 $xy + yz + zx$ 的最大值在 $x \leq y = z$ 时取到, 最小值在 $x = y \leq z$ 时取到.

在推论 5(ii) 中令 $n=3, m=0, p=\frac{1}{2}$, 且作代换 $x_1 = x^{\frac{1}{2}}, y_1 = y^{\frac{1}{2}}, z_1 = z^{\frac{1}{2}}$ 得: 当 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, x_1 y_1 z_1$ 不变时, $x_1 + y_1 + z_1$ 的最大值在 $x_1 \leq y_1 = z_1$ 或有数为 0 时取到, 最小值在 $x_1 = y_1 \leq z_1$ 时取到.

推论 6 对于非负实数 x, y, z , 若 $\sum xy, xyz$ 不变, 则 $\sum x$ 的最小值必在 $x \leq y = z$ 时取到, $\sum x$ 的最大值必在 $x = y \leq z$ 时取到.

证明: 若 x, y, z 中有数为 0, 不妨设 $x=0$, 则此时即求 yz 为定值时 $y+z$ 的取值范围, 显然当 $y=z$ 时 $y+z$ 最小, 而 $y+z$ 当 y 趋向于 0 时可以取到无穷大, 即最大值在 $x = y \leq z$ 时取到.

若 x, y, z 均大于 0, 则设 $xy=c, yz=a, xz=b$, 则:

$x = \sqrt{\frac{bc}{a}}, y = \sqrt{\frac{ac}{b}}, z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$, 于是转化为当 $\sum xy = \sum a, xyz = (abc)^{0.5}$ 不变时, 求

$\sum x = (abc)^{0.5} \sum \frac{1}{a}$ 的取值范围, 即 $\sum \frac{1}{a}$ 的取值范围.

由推论 5(ii) 知, 当 $a=b \leq c$ 时, $\sum \frac{1}{a}$ 最小, $a \leq b=c$ 时, $\sum \frac{1}{a}$ 最大,

即 $z \leq x = y$ 时 $\sum x$ 最小, $z = y \leq x$ 时 $\sum x$ 最大.

即 $\sum x$ 的最小值必在 $x \leq y = z$ 时取到, $\sum x$ 的最大值必在 $x = y \leq z$ 时取到.

推论 6 得证!

在处理三元完全对称不等式时, 我们可以控制三个初等多项式中的两个而改变第三个不等式的值使函数取到最值.

定理 8 一个关于非负实数 a, b, c 的完全对称不等式 $f(\sum a, \sum ab, abc) \geq 0$.

若 $f'(abc)f'(\sum ab) \geq 0$ 或 $f'(\sum a)f'(\sum ab) \geq 0$, 则不等式的等号成立当且仅当三数相等.

证明: 我们证明 $f'(\sum a)f'(\sum ab) \geq 0$ 时的情况, $f'(abc)f'(\sum ab) \geq 0$ 可同理证明.

我们只需证明 $f'(\sum a) \geq 0$ 的情形, 当 $f'(\sum a) \leq 0$ 时也可同理证明. 由推论 6 知我们可控制 $\sum ab, abc$, 调整 a, b, c 使得 $a \leq b = c$ 时, $\sum a$ 最小, 即 $f(a, b, c)$ 取最小值. $a = b \leq c$ 时, $\sum a$ 最大, 即 $f(a, b, c)$ 取最大值. 由于 $\sum ab, abc$ 不变, 则此时仍有 $f'(\sum a) \geq 0$, 故此时

$f'(\sum ab) \geq 0$, 由推论 5(ii) 的知, 我们可控制 $\sum a, abc$, 调整 a, b, c 使得 $a \leq b = c$ 时, $\sum ab$ 最大, 即 $f(a, b, c)$ 取最大值. $a = b \leq c$ 时, $\sum ab$ 最小, 即 $f(a, b, c)$ 取最小值. 由于 $\sum a, abc$ 不变, 则此时仍有 $f'(\sum ab) \geq 0$, 故此时 $f'(\sum a) \geq 0$. 故这样的调整能进行下去, 当调整至 (a, b, c) 时, (a, b, c) 仍为 (a, b, c) , 我们称之为调整结束 (易知当 $a = b = c$ 时调整结束, 故这样的调整必能结束). 假设当调整至 (a, b, c) 时, 调整结束, 则此时必有 $a \leq b = c$ 及 $a = b \leq c$ 或 $a = b \leq c$ 及 $a \leq b = c$. 无论哪种情形均能推出 $a = b = c$, 故定理 8 得证!

注: 通过定理 8 我们得到一种三元完全对称不等式在三数相等时取等的判定方法.

对于以上定理及推论, 用类似的方法, 我们可以得到当变元的定义域为 $[\alpha, \beta]$ 或 (α, β) 或 $[\alpha, \beta)$ 或 $(\alpha, \beta]$, $0 \leq \alpha < \beta$ 时与本节定理相似的结论, 限于篇幅这里也省略了. 而对于定义在实数域上的变元, 只要次数 m 使变元在以上证明过程中有意义, 我们亦可得到类似结论.

3.2 应用

通过以下例题, 说明取等判定定理在证明不等式中的应用.

用类似于推论 6 中的带换方法可证明中国不等式研究小组组长杨学枝老师的下述猜想^[12].

例 1 杨学枝猜想: x_1, \dots, x_n 为正实数, 且 $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n$, 则有: $2 + (n-2) \prod_{i=1}^n x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$

证明: 当 $n=1$ 时条件即为欲证不等式.

当 $n=2$ 时, 有条件 $x_1^2 + x_2^2 \leq 2$ 知 $2x_1x_2 \leq 2$, 此即为欲证不等式.

下面证明 $n \geq 3$ 的情形.

$$\text{令 } \prod_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{x_i} = \sqrt{\frac{1}{y_i}}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \therefore \prod_{i=1}^n x_i = \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n y_i}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}} \Rightarrow x_i = \frac{y_i^{\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1}^n y_i^{\frac{1}{2(n-1)}}}$$

$$\text{于是条件变为: } \sum_{i=1}^n y_i \leq n \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \text{欲证明: } 2 + (n-2) \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n y_i}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{y_i}}$$

我们控制 $\sum_{i=1}^n y_i, \prod_{i=1}^n y_i$ 不变, 则由推论 6 知 $\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{y_i}}$ 的最大值在 $y_1 \leq y_2 = y_3 = \dots = y_n$ 时取到. 即

$x_2 = x_3 = \dots = x_n \geq x_1$ 时取到.

于是只需证明: $(n-1)x^2 + y^2 \leq n$ 时, 有: $2 + (n-2)x^{n-1}y \geq x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}y$

$\Leftrightarrow (2-x^{n-1}) \geq x^{n-2}y((n-1)-x(n-2))$, 易知此时只需证明 $(n-1)x^2 + y^2 = n$ 的情形.

$$\Leftrightarrow 2+(n-2)x^{n-1}\sqrt{n-(n-1)x^2} \geq x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}\sqrt{n-(n-1)x^2} \quad (1 \leq x^2 \leq \frac{n}{n-1})$$

$$\text{记 } f(x) = (n-2)x^{n-1}\sqrt{n-(n-1)x^2} - x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}\sqrt{n-(n-1)x^2}$$

$$f'(x) = (n-2)(n-1)x^{n-2}\sqrt{n-(n-1)x^2} - (n-1)x^{n-2} - (n-2)(n-1)x^{n-3}\sqrt{n-(n-1)x^2} -$$

$$(n-2)(n-1)x^n(n-(n-1)x^2)^{-\frac{1}{2}} + (n-1)^2x^{n-1}(n-(n-1)x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (n-2)(x-1)(n-(n-1)x^2) - x\sqrt{n-(n-1)x^2} + x^2((n-1)-(n-2)x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(x-1)(n-(n-1)x^2) + (n-2)x^2(1-x) + x^2 - x\sqrt{n-(n-1)x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -n(n-2)(x-1)^2(x+1) + nx \frac{(x^2-1)}{x+\sqrt{n-(n-1)x^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+\sqrt{n-(n-1)x^2}} \geq (n-2)(x-1), \quad \text{记 } g(x) = x + \sqrt{n-(n-1)x^2}$$

则: $g'(x) = 1 - \frac{(n-1)x}{\sqrt{n-(n-1)x^2}} \leq 1 - (n-1)x < 0$, 即 $g(x)$ 在定义域上单调递减

$$\text{故: } \frac{x}{x+\sqrt{n-(n-1)x^2}} \geq \frac{x}{2}, \quad \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq (n-2)x - n + 2$$

$$\Leftrightarrow 2n-4 \geq (2n-5)x, \quad \Leftrightarrow x \leq \frac{2n-4}{2n-5}, \quad \Leftrightarrow \left(\frac{2n-4}{2n-5}\right)^2 \geq \frac{n}{n-1}, \quad \Leftrightarrow \frac{4n-9}{(2n-5)^2} \geq \frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (4n-9)(n-1) \geq (2n-5)^2, \quad \Leftrightarrow 4n^2 - 13n + 9 \geq 4n^2 - 20n + 25, \quad \Leftrightarrow 7n \geq 16$$

最后一个式子当 $n \geq 3$ 时显然. 故 $f'(x) \geq 0$, 即 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x) \geq f(1) = 0$, 故命题得证!

例 2 x_1, \dots, x_n 为正实数, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 求 $\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} x_j^x$ 的最大值 (x 为非负实数)

解: 当 $x \leq 1$ 时, $\frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} x_j^x}{n} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} x_j}{n}\right)^x \leq 1$, 即 $\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} x_j^x \leq n$

当 $x > 1$ 时, 注意到: $\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} x_j^x = \prod_{i=1}^n x_i^x \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^x}$

我们控制 $\sum_{i=1}^n x_i$ 、 $\prod_{i=1}^n x_i$ 的值不变,

则由推论 5(ii) 知 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^x}$ 的最大值必在 $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n = a$ 时取到

于是我们只需求: $f(a) = a^{(n-1)x} + (n-1)a^{(n-2)x}(n-(n-1)a)^x$ 的最大值, (其中 $1 \leq a \leq \frac{n}{n-1}$)

当 $f(a)$ 的最大值在 $a = \frac{n}{n-1}$ 取到时, $f(a) \leq f(\frac{n}{n-1})$

当 $f(a)$ 的最大值不在 $a = \frac{n}{n-1}$ 取到时, 即 $n-(n-1)a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(a) &= (n-1)x(a^{(n-1)x-1} + (n-2)a^{(n-2)x-1}(n-(n-1)a)^x - (n-1)a^{(n-2)x}(n-(n-1)a)^{x-1}) \\ &= (n-1)xa^{(n-2)x-1}(n-(n-1)a)^x \left(\left(\frac{a}{n-(n-1)a} \right)^x + (n-2) - (n-1) \frac{a}{n-(n-1)a} \right) \end{aligned}$$

令 $\frac{a}{n-(n-1)a} = k$, $g(k) = k^x + (n-2) - (n-1)k$, 则 $k \geq 1$, 当 $x \geq n-1$ 时,

$$g(k) = k^x + (n-2) - (n-1)k \geq (n-1)k^{\frac{x}{n-1}} - (n-1)k \geq 0.$$

当 $x < n-1$ 时, $g'(k) = xk^{x-1} - (n-1)$, 当 k 为正实数时, $g(k)$ 只有一个驻点 $k = \left(\frac{n-1}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}}$,

于是至多有两个零点, 而 $k=1$ 显然为 $g(k)$ 的一个零点, 又此时 $\left(\frac{n-1}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}} > 1$, 故 $f(a)$ 的最大

值必在 $k=1$ 或 k 趋向于无穷大时取到, 当 k 趋向于无穷大时即 $n-(n-1)a = 0$, 矛盾!

故此时 $f(a)$ 的最大值在 $k=1$ 即 $a=1$ 时取到.

于是 $f(a) \leq \max(f(1), f(\frac{n}{n-1}))$.

而当 $1 \leq x \leq \frac{\lg n}{\lg n - \lg(n-1)}$ 时, $f(1) \geq f(\frac{n}{n-1})$, 当 $x > \frac{\lg n}{\lg n - \lg(n-1)}$ 时, $f(1) < f(\frac{n}{n-1})$.

综上所述 $\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} x_j^x \leq \begin{cases} n, & \text{当 } 0 < x \leq \frac{\lg n}{\lg n - \lg(n-1)} \text{ 时} \\ \left(\frac{n}{n-1} \right)^{(n-1)x}, & \text{当 } x > \frac{\lg n}{\lg n - \lg(n-1)} \text{ 时} \end{cases}$

而当 $n \geq 3$ 时, $(1 + \frac{1}{n-1})^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n(n-1)} < n-1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \frac{\lg n}{\lg n - \lg(n-1)}$

于是我们有:当 $x_1, \dots, x_n \in R^+$, $\sum_{i=1}^n x_i^n = n$ 时有: $\sum (x_2 x_3 \cdots x_n)^{n+1} \leq n$, 此式即为杨学枝老师的另一个至今未解决的猜想^[13].

本题解决了一个指数最佳问题, 而由杨路院士开发的 Bottema 目前尚不能处理指数最佳的问题^[14].

4. 一些非常规取等条件的完全对称及轮换对称不等式的判定

在这部分开始之前我们首先要强调一下以下事实: 当 σ_1, σ_2 固定时, σ_3 在最小值与最大值之间是连续的(由推论 6 知), 即若 $f(\sigma_3)$ 的最大值大于 0, 而 $f(\sigma_3)$ 的最小值小于 0, 且 $f(\sigma_3)$ 是个连续函数, 则必存在 σ_3 , 使得 $f(\sigma_3) = 0$.

4. 1 三元完全对称 n 次齐次不等式的判定($n \geq 6, n \in N$)

之前我们证明了三元完全对称 n 次不等式($n \leq 5, n \in N$)等号成立的充要条件为两数相等或有数为 0, 我们称之为常规的取等条件, 而当次数为 6 的时候, 取等条件就不一定如此了, 那么三元 6 次完全对称不等式的取等条件究竟如何呢? 众多学者曾有过探讨^{[3], [15]}. 而关于三元 6 次完全对称不等式的完整判定还未有结果. 下面我们将得到一般的结论, 并向更高次拓展.

三元齐六次完全对称不等式必可写成如下形式:

$$f(a, b, c) = A\sigma_3^2 + (B\sigma_1^3 + C\sigma_1 t^2)\sigma_3 + g(\sigma_1, t) \geq 0$$

其中: $g(\sigma_1, t) = D\sigma_1^6 + E\sigma_1^4 t^2 + F\sigma_1^2 t^4 + Gt^6$, $\sigma_1 = \sum a, \sum ab = \frac{\sigma_1^2 - t^2}{3}, abc = \sigma_3^2$ (下同),

于是 $0 \leq t \leq \sigma_1$. 由原不等式的齐次性, 我们可不妨设 $\sigma_1 = 1$, 于是有可以得到如下定理:

定理 9 非负域上的三元 6 次完全对称不等式的判定定理

对于定义在非负域上的三元 6 次完全对称不等式, 其成立的充要条件是:

$$D(x+1)^6 + E(x+1)^4(x^2 - x + 1) + F(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2 + G(x^2 - x + 1)^3 \geq 0 \text{ 即 } f(x, 1, 0) \geq 0,$$

$$Ax^2 + (B(2x+1)^3 + C(2+x)(x-1)^2)x + D(x+2)^6 + E(x+2)^4(x-1)^2 + G(x-1)^6 \geq 0 \text{ 即 } f(x, 1, 1) \geq 0,$$

上述两不等式在 $x \in [0, +\infty)$ 时恒成立.

当 $A \geq 0$, 且 $4At^3 + (27C - 6A)t^2 + 2A + 27B \geq 0, 4At^3 + (6A - 27C)t^2 - 2A - 27B \geq 0$,

$B + Ct^2 \leq 0$ 在 $t \in [0, 1]$ 时均有解, 它们解的交集非空, 设这个集合为 (3).

则(3)中所有元素满足: $4AGt^6 + (4AF - C^2)t^4 + (4AE - 2BC)t^2 + 4AD - B^2 \geq 0$.

证明: 我们控制 σ_1 , t 不变, 改变 σ_3 的值.

若 $A \leq 0$. 则 $f''(\sigma_3) \leq 0$, 由推论 3 知, 只需证明 $f(x,1,0) \geq 0$ 或 $f(x,1,1) \geq 0$.

若 $A \geq 0$, 且 $f'(\sigma_3) = 0$ 无解, 由 σ_3 在最小值与最大值之间是连续的知 $f(\sigma_3)$ 的正负恒定, 故由推论 2 知只需证明 $f(x,1,0) \geq 0$ 或 $f(x,1,1) \geq 0$.

若 $A \geq 0$, 且 $f'(\sigma_3) = 0$ 有解, 即 $f'(\sigma_3) = 2A\sigma_3 + B\sigma_1^3 + C\sigma_1 t^2 = 0$, 有解 $\sigma_3 = -\frac{C\sigma_1 t^2 + B\sigma_1^3}{2A}$

由推论 1 知: $\max(0, \frac{(\sigma_1 + t)^2(\sigma_1 - 2t)}{27}) \leq \sigma_3 \leq \frac{(\sigma_1 - t)^2(\sigma_1 + 2t)}{27}$

于是: $\max(0, \frac{(\sigma_1 + t)^2(\sigma_1 - 2t)}{27}) \leq \frac{-C\sigma_1 t^2 - B\sigma_1^3}{2A} \leq \frac{(\sigma_1 - t)^2(\sigma_1 + 2t)}{27}$,

由上式我们可以得到: $4At^3 + (27C - 6A)t^2 + 2A + 27B \geq 0, 4At^3 + (6A - 27C)t^2 - 2A - 27B \geq 0$,

$B + Ct^2 \leq 0$ (其中 $0 \leq t \leq 1$)

上述三个不等式解集的交集即为 t 的取值范围(3), 而此时原不等式成立等价于:

$$\min f(\sigma_3) = f(-\frac{C\sigma_1 t^2 + B\sigma_1^3}{2A}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4Ag(\sigma_1, t) - (B + Ct^2)^2}{4A} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4A(D + Et^2 + Ft^4 + Gt^6) - (B^2 + C^2t^4 + 2BCt^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4AGt^6 + (4AF - C^2)t^4 + (4AE - 2BC)t^2 + 4AD - B^2 \geq 0$$

若满足(3)的 t 均满足上式则原不等式成立. 否则原不等式不成立.

综上所述, 定理 9 证毕!

于是三元齐六次完全对称不等式的判定我们在理论上得到了解决. 由于 $f(x,1,0) \geq 0$, $f(x,1,1) \geq 0$ 这都是一元 6 次不等式, 而对于一般的一元 6 次不等式是否有解需分 23 种情况讨论^[16], 所以要给出三元 6 次完全对称不等式的文字系数判定是非常困难的.

进一步对于定义在任何区间的变元 (在实数范围内), 我们均可得到完善的判定方法.

理论上, 我们容易知道只要能求出 $f'(\sigma_3)$ 或 $f'(\sigma_2)$ 或 $f'(\sigma_1)$ 的所有实根, 就可使用定理 9

的方法来判定三元 n 次完全对称齐次不等式, 于是只要 $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ 中一个的次数小于等于 5 (此时它的一阶导次数小于等于 4), 这样的不等式无论取等条件如何均能解决, 对于更高次数的较为特殊的问题也可以解决. 用类似的方法我们可以求得三元 n 次完全对称齐次不等式的判定定理 ($n = 7, 8, 9, 10, 11$), 限于篇幅这里就不一一赘述. 然而当次数为 12-14, 15-17 时分别需解一个三次方程与一个四次方程, 运算量很大, 要给出一个完整的判定定理较难.

4.2 三元轮换对称齐次不等式的取等判定

轮换对称式可以由初等多项式表示, 为此之前得到的定理在轮换对称不等式中也有应用. 由于所有的轮换对称不等式均可写成: $f(a, b, c) = g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \sum_{cyc} a^2 b \geq 0$, $\sum_{cyc} a^2 b$ 这个量显得尤为重要, 所以我们有必要对 $\sum_{cyc} a^2 b$ 做一些估计, 先求当 σ_1, σ_2 一定时, $\sum_{cyc} a^2 b$ 的上下界. 由于:

$$\sum_{cyc} a^2 b + \sum_{cyc} ab^2 = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3, (\sum_{cyc} a^2 b - \sum_{cyc} ab^2)^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\sigma_3 - 27\sigma_3^2$$

$$\text{于是: } \sum_{cyc} a^2 b = \frac{\sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3 \pm \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\sigma_3 - 27\sigma_3^2}}{2}$$

$$\text{记 } f(\sigma_3) = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3 + \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\sigma_3 - 27\sigma_3^2}$$

$$f'(\sigma_3) = -3 + \frac{1}{2}(-54\sigma_3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2))|(a-b)(b-c)(c-a)|^{-1}$$

当 $f'(\sigma_3) = 0$ 时, $\sum_{cyc} a^2 b$ 取到最大值.

$$\text{而: } f'(\sigma_3) = 0 \Leftrightarrow 3|a-b||b-c||c-a| = (9\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_1^3 - 27\sigma_3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 6abc = 3\sum_{cyc} ab^2$$

$$\Leftrightarrow 243\sigma_3^2 + (36\sigma_1^3 - 162\sigma_1 \sigma_2)\sigma_3 + \sigma_1^6 + 18\sigma_1^2 \sigma_2^2 + 9\sigma_2^3 - 9\sigma_1^4 \sigma_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_3 = \frac{9\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_1^3 \pm \sqrt{\sigma_1^6 + 27\sigma_1^2 \sigma_2^2 - 9\sigma_1^4 \sigma_2 - 27\sigma_2^3}}{27}, \text{ 易知应为较大根时, } \sum_{cyc} a^2 b \text{ 取到最大}$$

值.

$$\text{所以: } \max \sum_{cyc} a^2 b = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3 - \frac{\sum_{cyc} a^3 + 6abc}{3} = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3 - \frac{\sigma_1^3 + 9\sigma_3 - 3\sigma_1 \sigma_2}{3} = \frac{6\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1^3}{3} - 6\sigma_3$$

$$= \frac{6\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1^3}{3} - \frac{2}{9}(9\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_1^3 + \sqrt{\sigma_1^6 + 27\sigma_1^2 \sigma_2^2 - 9\sigma_1^4 \sigma_2 - 27\sigma_2^3})$$

$$= \frac{\sigma_1^3}{9} + \frac{2}{9} \sqrt{\sigma_1^6 + 27\sigma_1^2\sigma_2^2 - 9\sigma_1^4\sigma_2 - 27\sigma_2^3} = \frac{\sigma_1^3}{9} + \frac{2}{9}(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^{\frac{3}{2}}$$

类似地可求得： $\min_{cyc} \sum a^2b = \frac{\sigma_1^3}{9} - \frac{2}{9}(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^{\frac{3}{2}}$

所以： $\min_{cyc} \sum a^2b = \frac{\sigma_1^3}{9} - \frac{2}{9}(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^{\frac{3}{2}}, \max_{cyc} \sum a^2b = \frac{\sigma_1^3}{9} + \frac{2}{9}(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^{\frac{3}{2}}$

利用类似的方法我们还可以证明其他一些三元轮换对称不等式.

我们再对轮换对称不等式的判定作一番探究. 陈胜利曾得到了三元三次轮换对称不等式成立的充要条件, 探究过三元四次轮换对称不等式, 获得了部分结论^[17]. 而关于三元四次轮换对称不等式的完整判定也仍未有结果. 我们也将从三元四次轮换对称不等式开始, 得到一般结论并向更高次数拓展.

三元四次轮换对称不等式可写成:

$$F(a, b, c) = k_1\sigma_1^4 + k_2\sigma_1^2\sigma_2 + k_3\sigma_2^2 + k_4\sigma_1\sigma_3 + k_0\sigma_1 \sum_{cyc} a^2b$$

$$\text{且 } \sum_{cyc} a^2b \geq \sum_{cyc} ab^2, \text{ 即 } \sum_{cyc} a^2b = \frac{\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 + \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\sigma_3 - 27\sigma_3^2}}{2}$$

由原不等式的齐次性, 我们可不妨设 $\sigma_1 = 1$,

定理 10 定义在非负域上的三元四次轮换对称不等式的判定定理:

对于定义在非负域上的三元四次轮换对称不等式, 其成立的充要条件是:

$$f(x, 1, 1) \geq 0, f(x, 1, 0) \geq 0, x \in [0, +\infty);$$

若关于 σ_3 的方程 $A\sigma_3^2 + B\sigma_3 + C = 0$ 有实数解 σ_{3_i} ($i = 1, 2$), 其中:

$$A = 729k_0^2 + 27(2k_4 - 3k_0)^2, B = -486k_0^2\sigma_1\sigma_2 + 108\sigma_1^3k_0^2 - 2(2k_4 - 3k_0)^2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2),$$

$$C = (81\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_1^6 - 36\sigma_1^4\sigma_2)k_0^2 - (2k_4 - 3k_0)^2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3)$$

$$\text{且存在 } \sigma_{3_i} \text{ 使得 } \max(0, \frac{(1+t)^2(1-2t)}{27}) \leq \sigma_{3_i} \leq \frac{(1-t)^2(1+2t)}{27} \quad (4)$$

则对于满足 (4) 的 t, σ_{3_i} 也满足: $f(\sigma_{3_i})_{\min} \geq 0$

证明: 我们控制 σ_1, σ_2 不变, 改变 σ_3 的值.

$$F'(\sigma_3) = k_4\sigma_1 + k_0\sigma_1 \frac{-3 + \frac{1}{2}(18\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_1^3 - 54\sigma_3)(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\sigma_3 - 27\sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\frac{2F'(\sigma_3)}{\sigma_1} = (2k_4 - 3k_0)(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\sigma_3 - 27\sigma_3^2)^{\frac{1}{2}} + k_0(9\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1^3 - 27\sigma_3)$$

$$F'(\sigma_3) = 0 \Leftrightarrow (2k_4 - 3k_0)^2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 + 2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\sigma_3 - 27\sigma_3^2) = k_0^2(9\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1^3 - 27\sigma_3)^2$$

$$\Leftrightarrow A\sigma_3^2 + B\sigma_3 + C = 0 \quad (5)$$

$$\text{其中: } A = 729k_0^2 + 27(2k_4 - 3k_0)^2, \quad B = -486k_0^2\sigma_1\sigma_2 + 108\sigma_1^3k_0^2 - 2(2k_4 - 3k_0)^2\sigma_1(9\sigma_2 - 2\sigma_1^2),$$

$$C = (81\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_1^6 - 36\sigma_1^4\sigma_2)k_0^2 - (2k_4 - 3k_0)^2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3)$$

$$\sigma_{3,1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \text{又 } \max(0, \frac{(\sigma_1 + t)^2(\sigma_1 - 2t)}{27}) \leq \sigma_3 \leq \frac{(\sigma_1 - t)^2(\sigma_1 + 2t)}{27}$$

若(5)无实数解或无 σ_3 满足(4), 则不等式成立的充要条件为:

$$f(x, 1, 1) \geq 0, f(x, 1, 0) \geq 0, \quad x \in [0, +\infty)$$

若否, 则 $f(\sigma_3)_{\min} = f(\sigma_{3_i})_{\min}$, 于是等价于证明 $f(\sigma_{3_i})_{\min} \geq 0$ 对于满足条件的 σ_{3_i} 在(4)的范围内成立. 于是定理得证!

进一步对于定义在任何区间的变元(在实数范围内), 我们均可得到完善的判定方法.

与之前类似, 理论上, 只要我们能求出 $f'(\sigma_3)$ 或 $f'(\sigma_2)$ 或 $f'(\sigma_1)$ 的所有实根, 就可使用定理 10 的方法来判定三元 n 次齐次轮换对称不等式. 然而当次数分别为 5 次、6 次时, 需解一个 3 次方程与 4 次方程, 情形将变得更为复杂, 运算量很大, 要给出一个完整的判定定理较难.

5. 总结

本研究通过控制两个初等对称多项式, 利用函数的单调性及 Jensen 不等式, 说明了一类三元完全对称不等式取等的充要条件, 继而推广得到关于一类 n 元完全对称不等式取等充要条件的若干定理, 并举例说明此方法在证明不等式中的应用. 最后得到了三元 6 次齐次完全对称不等式以及三元 4 次齐次轮换对称不等式的判定定理, 并从理论探讨了在更高次不等式判定方面的可行性. 本研究结果在证明不等式中有广泛应用.

6. 问题与展望

在证明过程中遇到的一些巧合令作者无法解释, 在尝试推广中也遇到了不少困难, 提出来并就此作一番展望.

6. 1 我们能否将定理 1 中的不等式推广为四元甚至 n 元呢? 这首先要

$f'(\sum a_1, \sum a_1 a_2, \sum a_1 a_2 a_3, \dots, \prod_{i=1}^n a_i)$ 至少要有两个实数根, 对 n 元这样的函数, 它的一阶导

为 $(n-1)$ 次, 现在还不知道 $n \geq 5$ 次实系数方程的判别式, 故要推广几乎是不可能的. 若要推广至 4 元或者 5 元, 这需要解一个高次方程, 计算量很大.

6. 2 Jensen 不等式可看作控制 $\sum x_i$ 不变, 利用函数凹凸性, 将 n 个变量调整至相等, 本文的第三部分的核心是控制 $\sum x_i$, $\sum x_i^m$ 这两个多项式不变, 利用函数凹凸性将 n 个变量调整至 $n-1$ 元相等或有变元到达边界处. 那么能否控制 p 个诸如 $\sum x_i^m$ 的多项式或 p 个初等多项式不变, 利用函数凹凸性将 n 个变量调整至 $n-p+1$ 元相等或有变元到达边界处呢?

6. 3 杨路院士指出对于常数系数, 文字系数在给定范围内根的个数的判定, 计算机都能解决^[18], 为此我们猜想利用本文第 4 部分的证明方法, 并做一定改进能在计算机证明不等式中得到应用, 判定更为广泛的 3 元完全对称及轮换对称齐次不等式.

以上问题都有待进一步深入研究.

致谢

本文创作历时近两年, 在这期间曾蒙我校的汪杰良、万军老师的精心指导, 复旦大学数学系张思汇博士始终关注着本文的进展, 并提出了一些宝贵的建议, 中国不等式研究小组开辟的网站为本文的创作提供了许多学习素材. 杨路院士、刘宝乾先生、姚勇先生更是在百忙中对本研究部分内容给予了帮助, 特此致谢!

参考文献

- [1] 单增. 利用导数证明不等式. [J] 中等数学, 2006(2):11-15.
- [2] 姚勇, 陈胜利. 用 Schur 分拆方法证明不等式竞赛题. [J] 中等数学, 2007(12):6-10.
- [3] 陈胜利, 黄方剑. 三元对称形式的分拆与不等式的机器证明. [J] 数学学报, 2006,49(3):491-502.
- [4] 陈世平,张景中.初等不等式的可读证明的自动生成.[J] 四川大学学报(工程科学版) 2003,35(4):86-93.
- [5] Choi M.D, Lam T.Y. and Reznick B, Even symmetric sextics, Math. Z. 1987, 195:559-580.
- [6] Harris W.R., Real even symmetric ternary forms, Journal of Algebra, 1999, 222:204-245.
- [7] Timofte V, On the positivity of symmetric polynomial functions, Part I: General results, J. Math. Anal. Apple, 2003, 284:174-190.
- [8] 刘保乾. BOTTEMA, 我们看见了什么.[M]拉萨: 西藏人民出版社,2003.
- [9] 杨路, 姚勇, 冯勇. Tarski 模型外的一类机器可判定问题. [J]中国科学 A 辑:数学,2007, 37 (5): 513-522.

- [10] 陈胜利. 关于三元齐四次对称不等式的一个定理及其应用. [J] 福建中学数学,1995(3).
- [11] 匡继昌. 常用不等式(第三版). [M] 济南:山东科学与技术出版社, 2004.
- [12] 杨学枝. 从一道不等式题谈起. [J] 中学数学, 2007 (2):18,55-56.
- [13] 中国不等式研究小组网站: <http://www.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp?boardID=19&ID=3022&page=2>.
- [14] 中国不等式研究小组网站: [http://www.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp?boardID=5&ID=3001&star=2&page=.](http://www.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp?boardID=5&ID=3001&star=2&page=)
- [15] 陈胜利. 一类三元六次对称不等式的简化证法. [J] 福建中学数学,2002(10):14-15.
- [16] 杨路, 张景中, 侯晓荣.非线性科学丛书-非线性代数方程组与定理机器证明. [M]上海:上海科技教育出版社, 1996.09.
- [17] 陈胜利. 一类三元四次轮换对称不等式的化简证法. [J] 福建中学数学,2003(09):9,11-12.
- [18] LU Yang. Recent Advances on Determining the Number of Real Roots of Parametric Polynomials . [J] Symbolic Computation. 1999(28), 225-243.