

立体几何法解决平面中的共线共点问题

参赛队员：鲁海昊 臧佳玮

指导老师：严贤付

学校：青岛二中

Preface

Generally speaking, when we deal with the three-dimensional geometry problems, we used to transfer them into the plane geometry first. However, I cannot agree with the idea that we should always transfer the three-dimensional geometry problems into the plane geometry mode.

In the following article, we solve the problem in an opposite way, which means solving the problems of a total of three points or three planes by using the three-dimensional geometry. The main idea is simple: if three points both are on two planes, they are in line; if three lines are the interception lines of three different planes which intercept each other, they have a common point. The key to this point is how to construct the two or three planes. It follows that we provide three methods to construct the planes, and independently prove some basic theories and properties.

(1) transferring plane graphs into three-dimensional graphs

(2) using proportional relationship and similarity

(3) symetrically finding out two planes which do not parallel to the base

Therefore, let's walk into the three-dimensional world, and research the common problems in a different vision.

前言：

平时我们解决立体几何问题一般都要转化为平面几何来处理。这是否意味着，立体几何就要永远以平面几何为模板呢？我想不是的。

在下面这篇文章里，我们反其道而行之，用立体几何解决某些平面上三点共线问题和三线共点问题。其核心思想很简单：三个点均在两个确定的平面上，则这三点共线；某三条线，分别为三个不同平面两两的交线，则它们共点。此问题的关键在于如何构造两个平面或三个平面，在下文中我们提出了三种思想来构造平面，独立证明了一些基本定理和性质。

- （一）将平面图看成立体图
- （二）利用比例关系和位似
- （三）对称地找两个不平行于底面的平面

那么就让我们走进立体世界，从另一个角度看我们平时遇到的问题。

正文

首先我们看一个我们很熟悉的问题：

求证：三角形的三条中线交于一点

三中线交于一点的证明：

将 $\triangle ABC$ 在空间内向上垂直上移 CC_1 的高度，

则四边形 $CBB'C'$ 为平行四边形。

设 $B'C$ 交 $B'C$ 于 O_1 ，类似的得到点 O_2 和 O_3 。

设 AB 中点为 M_3 ， AC 中点为 M_2 ， CB 中点为 M_1 。

$\because AO_1、BO_2$ 在平面 ABC' 上

$\therefore AC_1$ 与 BO_2 有交点 M ,

$\because O_3$ 在平面 $AB'C$ 和平面 $BA'C$ 上

$\therefore CO_3$ 是平面 $AB'C$ 与平面 $BA'C$ 的交线，

而平面 $AB'C$ 、平面 $BA'C$ 和平面 $AC'B$ 共点 M

\therefore 由此知 $AO_1、BO_2、CO_3$ 共点 M 。

将图形竖直投影，则 $A' \rightarrow A, B'$

$\rightarrow B$

又 $\because ABB'A'$ 为平行四边形

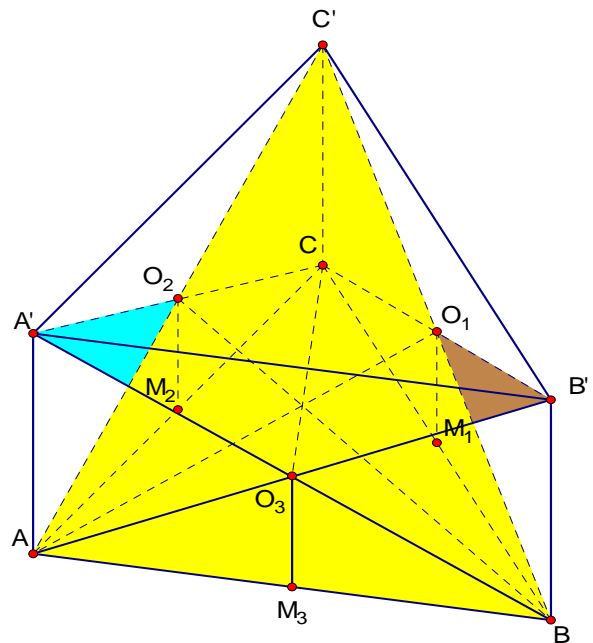
$\therefore O_3$ 是 $A'B$ 中点，即 $O_3 \rightarrow M_3$,

同理 $O_2 \rightarrow M_2, O_1 \rightarrow M_1$,

又 $\because AO_1, BO_2, CO_3$ 共线

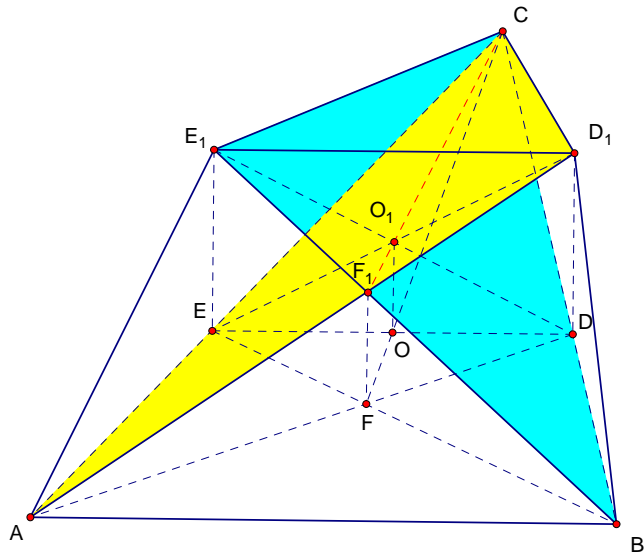
$\therefore AM_1, BM_2, CM_3$ 共线，结论

成立。



上述解答过程看似冗长，但是思路非常清晰自然。并且，这种方法绕过了塞瓦定理的比例式，揭示了本质。将一个平面向上平移是将平面问题转化为立体问题的有效途径。并且，我们构造了三个不同的平面，用它们来说明共点。三个平面均用不同的颜色标记。

用这种方法还可以解决一道经典的题：



已知三角形 ABC 中，DE 平行于 AB，AD 与 BE 交于点 F。连接 CF，交 DE 于 O，求证 O 是 DE 的中点。

解答跟上述题完全同理，根据所给的图中标出的平面，即可解决。不仅同理，此题甚至只是上题的一个特例，真可谓游刃有余。

有时，利用类似的方法可以解决稍复杂的问题：

四方形 ABCD，AB 交 DC 于 E，AD 交 BC 于 F，AC 交 BD 于 G，FG 交 AB 于 H，则有 $\frac{AH}{HB} = \frac{AE}{EB}$ 。

证明：图见下页。

分别过 A、B 竖直向上作 AA_1 、 BB_1 ，使得 A_1B_1E 共线。

∵ DC 交于 A_1B_1 于 E

∴ A_1C 与 B_1D 有交点，设为 G_1 ，设 A_1B 交 AB_1 于 H_1 ，

则 G_1 和 H_1 都在平面 FB_1D 与平面 FA_1C 上，

∴ FG_1H_1 为两平面的交线，

$\therefore FG_1H_1$ 共线。将图形坚直向下平行投影

则 $A_1 \rightarrow A$, $B_1 \rightarrow B$, $\therefore G_1 \rightarrow G$

又 $\because F$ 、 G_1 、 H_1 共线, F 、 G 、 H 共线

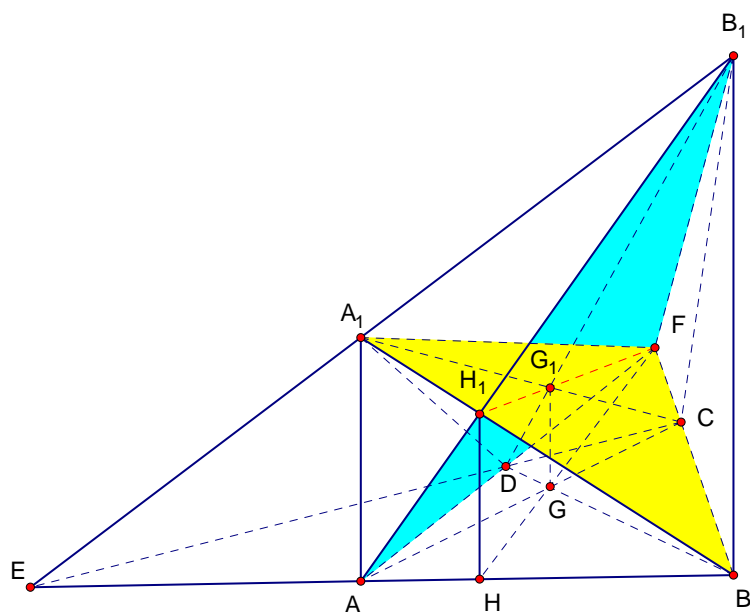
$\therefore H_1 \rightarrow H$, 即 $H_1H \perp AB$ 。又 $\because B_1B // H_1H // A_1A$

根据平行线性性质有 $\frac{AH}{HB} = \frac{A_1H_1}{A_1B_1} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AE}{EB}$, 结论成立。

注: 这是调和点列的一个比较重要的判定, 我们不难发现, 用立体几何方法同样可以巧妙的转化比例关系, 同时, 我们用了前面提到的构造对称平面的方法。看来涉及到调和点列的问题, 立体几何也可以适当的解决。当然, 这也省去了不少繁长的比例式。

这是本题的图:

重要的平面用颜色标出。



让我们再来看一个与比例和位似有关的案例:

求证: 平面上三个不等大的圆 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 、 $\odot O_3$ 的两两的外公切线交点共线。(此题的证明是冯祖明在 2007 年国家集训队讲课时所述)

如图, 设两两外公切线交点分别为 A 、 B 、 C 分别过圆 O_i 坚直向上作 O_iO_i' , 使得 $O_iO_i' = r_i$ ($i=1, 2, 3$)

根据对称性及位似性及 $O_2O_2' \parallel O_1O_1'$

有 A, O_2', O_1' 共线, 且 $\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{O_2O_2'}{O_1O_1'}$

同理 B, O_3', O_1' 以及 C, O_3', O_2' 共线。

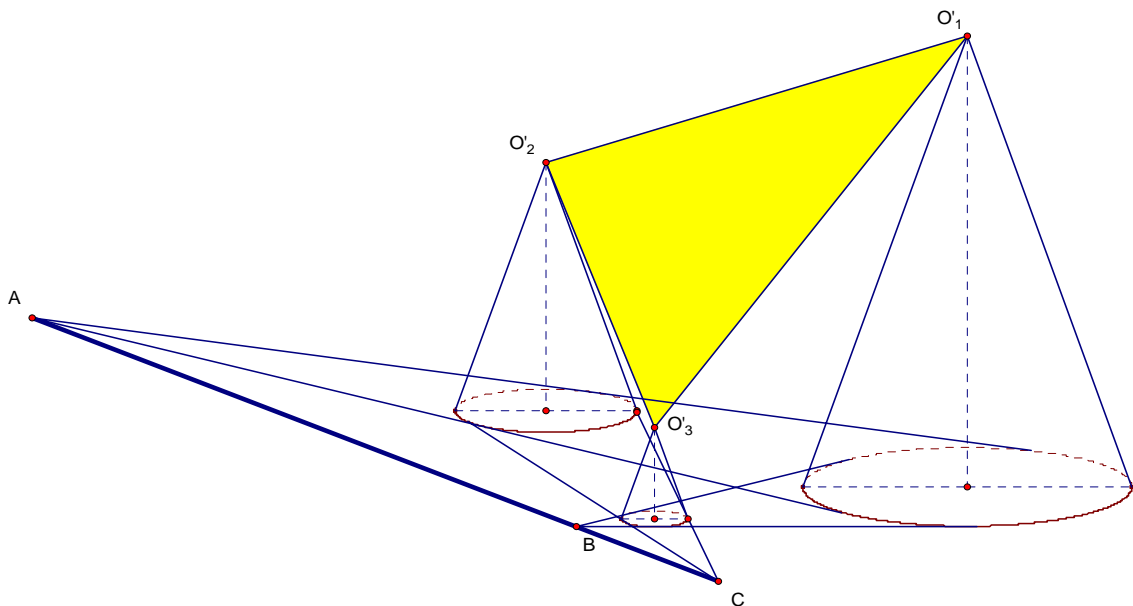
$\therefore A, B, C$ 在平面 $O_1'O_2'O_3'$ 上,

又 $\because A, B, C$ 在平面 $O_1O_2O_3$ 上

$\therefore A, B, C$ 在两平面的交线上,

即 A, B, C 共线。证毕。

注: 同样可证, 圆 O_1 与圆 O_2 的内公切线交点、圆 O_2 与圆 O_3 的内公切线交点和圆 O_3 与圆 O_1 的外公切线交点共线。



再让我们看一看梅涅劳斯定理及逆定理的另一种证明

梅涅劳斯定理:

$\triangle ABC$ 和截线 DEF , 有 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ 。

证明:

如图, 过 A 垂直向上作点 A_1 , 过 B 垂直向下作点 B_1 , 过 C 垂直向

下作点 C_1 ，使得 A_1 、 F 、 B_1 共线， A_1 、 E 、 C_1 共线，

∴直线 FE 在平面 ABC 和平面 $A_1B_1C_1$ 上

∴直线 FED 为平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线。

∴ $BB_1 \parallel CC_1$

∴ B 、 C 、 C_1 、 B_1 共面，

设 BC 交 B_1C_1 于 D' ，则 D' 在平面 ABC 上，也在平面 $A_1B_1C_1$ 上。

∴ D' 在 EF 上

又∴ D' 在 BC 上 ∴ $D' = D$

$$\therefore \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BD}{DC} \text{ ①}, \quad \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AF}{FB} \text{ ②}, \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CE}{EA} \text{ ③}$$

$$\text{①} \times \text{②} \times \text{③} \text{ 得 } \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1, \text{ 即原式成立。}$$

下面是逆定理：

梅涅劳斯逆定理的证明：

如图，过 A 垂直向上作点 A_1 ，过 B 垂直向下作点 B_1 ，过 C 垂直向下作点 C_1 ，使得 A_1 、 F 、 B_1 共线， A_1 、 E 、 G 共线，

$$\text{则有 } \frac{AF}{FB} = \frac{A_1A}{BB_1}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CC_1}{AA_1},$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{1}{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA}} = \frac{1}{\frac{A_1A}{B_1B} \cdot \frac{CC_1}{AA_1}} = \frac{B_1B}{C_1C}$$

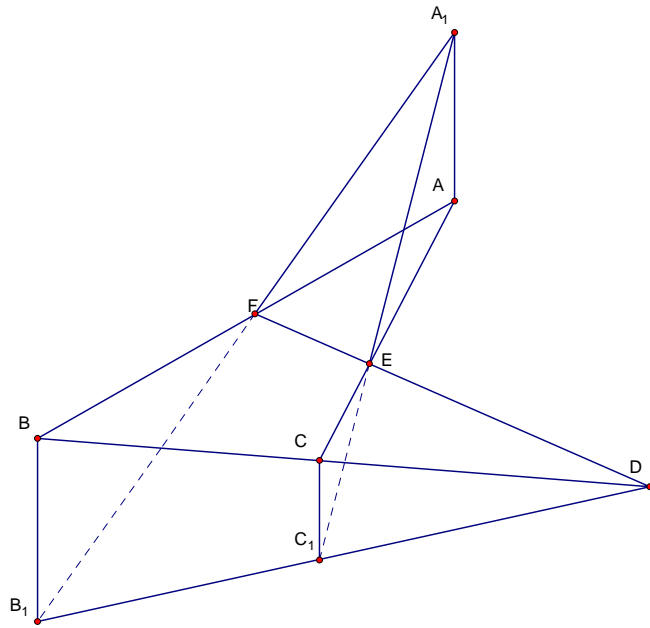
又∴ $BB_1 \parallel CC_1$

∴ BB_1 、 CC_1 关于点 D 位似

∴ B 、 C 、 D 共线，∴ D 、 E 、 F 在平面 $A_1B_1C_1$ 上

又∴ D 、 E 、 F 在平面 ABC 上，又∴平面 ABC 不平等于平面 $A_1B_1C_1$

∴ D 、 E 、 F 共线。



对梅涅劳斯定理及其逆定理的证明，可算是把各种方法的一个综合，其中不乏比例、共线面等方法的运用。

我们知道，在几何中，有一个非常重要的定理，那就是笛沙格定理及其逆定理。这个定理涉及到平面几何和射影几何的许多内容。在平面几何的证明中，利用了三次梅涅劳斯定理和一次它的逆定理，比例式非常复杂。然而，用立体几何来证明它，不仅能更加清楚明了，还能更好的反应这个定理的透视的本质。

笛沙格定理的证明：

笛沙格定理：已知两三角形的对应点连线共点 O ，求证它们的对应边所在直线的交点 D 、 E 、 F 共线。（图见下）

也可叙述为：若两三角形有透视中心，则它们必有透视轴。

证明：

任找一点 O' 使得 $O' O \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 如图所示。

连接 OA_2 、 OB_2 、 OC_2

易知, OA_2 上存在一点 A_1' 使得 $A_1' A_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$

类似的定义点 B_1' 、 C_1'

\therefore 直线 B_2B_1' 与 C_2C_1' 共点 O'

$\therefore B_2$ 、 C_2 、 B_1' 、 C_1' 四点共面,

而 $\therefore C_1' C_1 \parallel B_1' B_1$, 同样 C_1 、 C_1' 、 B_1 、 B_1' 也共面。

\therefore 平面 $C_1C_1' B_1B_1'$ 、平面 $B_2C_2B_2' C_2'$ 和平面 $A_1B_1C_1$ 交于一点 D 。

$D \in$ 平面 $C_1C_1' B_1B_1' \cap$ 平面 $B_2C_2B_2' C_2' =$ 直线 $B_1' C_1'$

$\therefore D \in$ 平面 $A_1' B_1' C_1'$

$\therefore D \in$ 平面 $A_1' B_1' C_1' \cap$ 平面 $A_1B_1C_1$

同理, 对于点 E 和 F 也有同样的结论

$\therefore D$ 、 E 、 $F \in$ 平面 $A_1' B_1' C_1' \cap$ 平面 $A_1B_1C_1$ 是一条直线

可得 D 、 E 、 F 三点共线。证毕。

下面是逆定理:

笛沙格逆定理的证明

笛沙格逆定理: 若两个三角形的对应边所在直线交点 D 、 E 、 F 共线, 则它们的对应顶点连线共点。

也可叙述为: 若两个三角形有透视轴, 那么它们一定有透视中心。

证明:

易知存在一个不同的平面满足原两三角形的透视轴在该平面中。

在该平面中找到三个点 A_1' 、 B_1' 、 C_1' ，

使得 A_1 、 B_1 、 C_1 分别是这三点在平面 $A_1B_1C_1$ 上的射影。

由射影的性质： $\because B_1$ 、 C_1 、 D 三点共线

$\therefore B_1'$ 、 C_1' 、 D 也共线，

又 $\because B_2$ 、 C_2 、 D 共线

$\therefore B_2$ 、 B_1' 、 C_2 、 C_1' 四点共面，记为平面 p ，类似的有平面 q 和 r

则平面 p 、平面 q 和平面 r 交于一点 O'

$\therefore O' \in \text{平面}q \cap \text{平面}r = \text{直线}A_2A_1'$

设 O' 在平面 $A_1B_1C_1$ 上的射影是 O ,则有 $O \in \text{直线}A_1A_2$

同理， $O \in \text{直线}B_1B_2$, $O \in \text{直线}C_1C_2$

$\therefore \text{直线}A_1A_2$ 、 B_1B_2 、 C_1C_2 共点 O 。证毕。

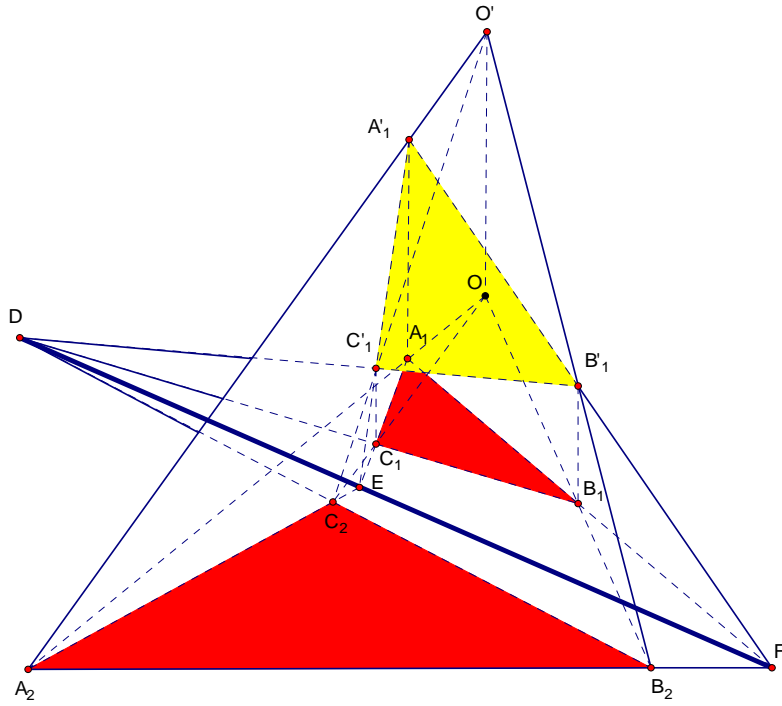
很自然的，我们还有更多的发现：

进一步：三个三角形若有公共的透视中心，那么它们的两两的透视轴共点。

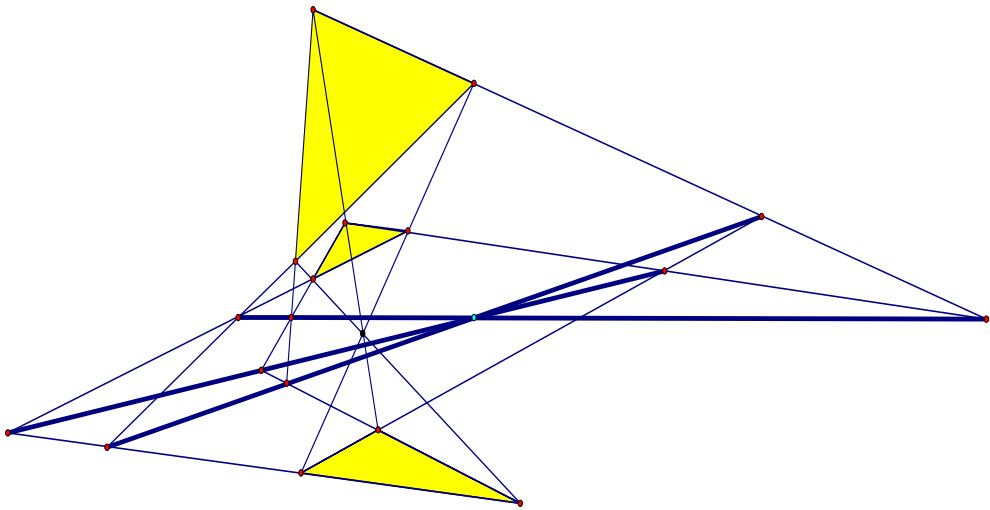
这是一个经典的结论，我们发现用立体几何方法可以轻松解决：

利用前面的证明笛沙格定理的方法，我们可以将公共的透视中心“提”起来，因此我们可以不妨设三个三角形所在的三个平面两两不重合。

这样一来，由笛沙格定理的证明过程我们可以知道：他们两两的透视轴就是它们所在的平面的两两的交线。因此这三个平面的交点必过它们两两的交线，这个点就是我们要找的所共的点。（如图所示）



(笛沙格定理及其逆定理)



(进一步探究)

上面，我们用了另一种方法，是将某较特殊的点“提”起来，或者将某一平面绕着某一特殊的直线“转”一下。通过试验，我们发现两种方法都会收到很好的效果。

注：上面我们讨论三平面共点时，我们默认了三平面彼此是非平凡的位置关系，即排除了平面平行、重合、交线相同等较为特殊的位置关

系。由于在这些关系下，问题变得较为简易，因此我们没有用更多的篇幅来讨论这些情况，敬请谅解。

最后我们看通过这种思想解决的一道题：

如图是一个完全四遍形。求证：P、Q、R 三点共线

（当然有类似的其他三组三点共线，这里只给出一组，其他同理）

证明：任找一点 M,使得 $MB \perp$ 平面 ABC

连接 ME、MF、MG。

易知直线MF上存在一点 A_1 , 使得 $A_1A \perp$ 平面ABC

类似的定义点 C_1 、 D_1 。

由于同时垂直于平面 ABC

$\therefore A_1A \parallel C_1C$, 即 A_1 、A、 C_1 、C 四点共面。

而平面ABC、平面 A_1AC_1C 和平面 A_1EF 交于一点，是R

$\therefore R \in$ 平面 $A_1EF \cap$ 平面 $A_1AC_1C =$ 直线 A_1C_1

$\therefore R \in$ 平面 $A_1C_1D_1$, 即 $R \in$ 平

面 $A_1C_1D_1 \cap$ 平面ABC

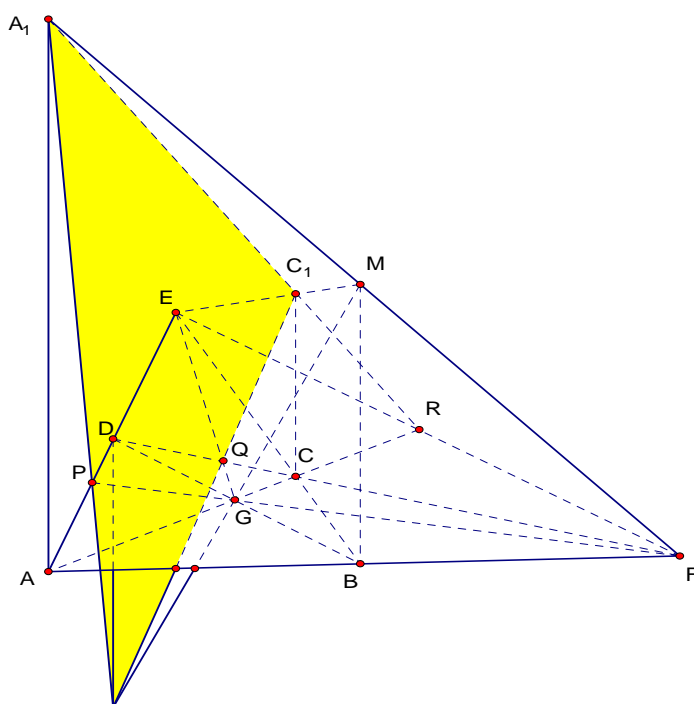
同理，对于点 P、Q，结论也

成立

$\therefore P$ 、 Q 、 $R \in$ 平面 $A_1C_1D_1 \cap$ 平

面ABC是一条直线

即 P、Q、R 三点共线。证毕。



后记：

事实上，我们提出的这种方法与射影几何存在着深刻的内在联系，射影变换证明中平凡问题也可以说是利用立体几何证明平面几何问题。

以上所讨论的问题基本上都是直线型问题，我们曾一度研究二次曲线，如著名的 Pascal 定理、Brianchon 定理、Pappus 定理以及一些基本性质。因为时间有限，我们一直没有找到二次曲线的直接性质，因而无法在有限空间内证明这些定理，但我们以后会继续研究，争取取得进一步突破。

致谢

参考文献

R.A.约翰逊，单增译，近代欧式几何学，1999 年一月出版

冯祖明，2007 年国家集训队讲课稿